$M\left(m,-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2\right)(-4<m<0)$，则 $N\left(m,\frac{1}{2}m+2\right)$，$Q\left(-m^2-3m,-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2\right)$，

$\therefore MN=-\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+2-\left(\frac{1}{2}m+2\right)=-\frac{1}{2}m^2-2m$，$MQ=-m^2-3m-m=-m^2-4m$，$\therefore MN+MQ=-\frac{1}{2}m^2-2m+(-m^2-4m)=-\frac{3}{2}m^2-6m=-\frac{3}{2}(m^2+4m)=-\frac{3}{2}(m+2)^2+6$. $\because -\frac{3}{2}<0$，$\therefore$ 当 $m=-2$ 时，$MN+MQ$ 的值最大，最大值为 6.

(3) 由题意可设 $E\left(t,-\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2\right)$，$D(s,0)$. ∵ 平面内以点 A,D,C,E 为顶点的四边形是平行四边形，$A(-4,0)$，$C(0,2)$，∴ 当 AC 为对角线时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+s=-4+0,\\ -\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+0=0+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-3,\\ s=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=0,\\ s=-4\end{cases}$（舍去），此时点 E 的坐标为 $(-3,2)$.

当 AC 为边，四边形 $ADEC$ 为平行四边形时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+(-4)=s+0,\\ -\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+0=0+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-3,\\ s=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=0,\\ s=-4\end{cases}$（舍去），此时点 E 的坐标为 $(-3,2)$.

当 AC 为边，四边形 $AEDC$ 为平行四边形时，由平行四边形的性质可得 $\begin{cases}t+0=-4+s,\\ -\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+2+2=0+0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=\frac{-3+\sqrt{41}}{2},\\ s=\frac{5+\sqrt{41}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=\frac{-3-\sqrt{41}}{2},\\ s=\frac{5-\sqrt{41}}{2},\end{cases}$ 此时点 E 的坐标为 $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$. 综上所述，点 E 的坐标为 $(-3,2)$ 或 $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{2},-2\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2},-2\right)$.

思路分析 (3) 分三种情况讨论：当 AC 为对角线时；当 AC 为边，四边形 $ADEC$ 为平行四边形时；当 AC 为边，四边形 $AEDC$ 为平行四边形时. 分别利用平行四边形的性质求解即可.

第三章　圆

1　圆

刷基础

1. C　【解析】确定一个圆需要两个条件：圆心和半径. 故选 C.

2. B　【解析】四个顶点可在同一个圆上的四边形，一定有一点到它的四个顶点的距离都相等，因而 A、C、D 都是错误的. ∵ 矩形对角线相等且互相平分，∴ 四个顶点到对角线交点的距离相等，∴ 矩形四个顶点一定可在同一个圆上. 故选 B.

3. C　【解析】直径是最长的弦，①正确；直径是弦，但弦不一定是直径，②错误；半径相等的两个半圆是等弧，③正确；长度相等的两条弧不一定是等弧，④错误；半径相等的两个圆是等圆，⑤正确. 故选 C.

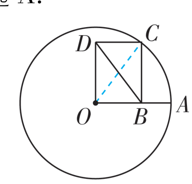
4. B　【解析】题图中的弦有 AB，CE，BC. 故选 B.

5. A　【解析】∵ AB 是⊙O 的弦，⊙O 的半径为 6 cm，∴ ⊙O 的直径为 12 cm，∴ 0 cm$<AB\leq$12 cm，∴ 弦 AB 的长不可能为 13 cm. 故选 A.

6. A　【解析】∵ $OA=OB$，$\angle OAB=25°$，∴ $\angle OBA=\angle OAB=25°$，∴ $\angle AOB=180°-\angle OAB-\angle OBA=130°$. ∵ $OA=OC$，$\angle OCA=40°$，∴ $\angle OAC=\angle OCA=40°$，∴ $\angle AOC=180°-\angle OAC-\angle OCA=100°$，∴ $\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=130°-100°=30°$，故选 A.

刷有所得　同一圆中的半径始终相等，所以由圆的半径作为两边的三角形必为等腰三角形.

7. 4　【解析】如图，连接 OC.

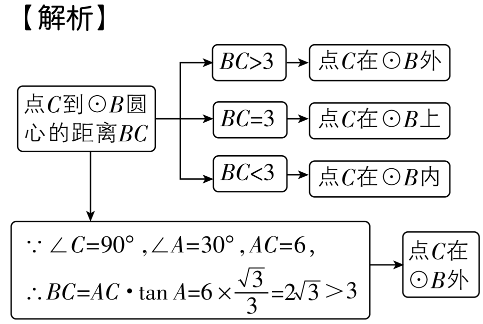


∵ 四边形 $OBCD$ 是矩形，
∴ $\angle OBC=90°$，$OB=CD=6$，
∴ $OC=OA=\sqrt{BC^2+OB^2}=10$，
∴ $AB=OA-OB=4$，故答案为 4.

8.【解】∵ $CD=OA$，$OA=OD$，∴ $CD=OD$，
∴ $\angle DOC=\angle C=23°$，
∴ $\angle EDO=\angle C+\angle DOC=23°+23°=46°$.
∵ $OD=OE$，∴ $\angle OED=\angle ODE=46°$，
∴ $\angle EOB=\angle C+\angle OEC=23°+46°=69°$.

归纳总结　记点到圆心的距离为 d，圆的半径为 r，$d>r$ 说明点在圆外，$d=r$ 说明点在圆上，$d<r$ 说明点在圆内.

9. C　【解析】



10. D 【解析】∵ ⊙B 的半径为 4，点 A 在⊙B 内，∴ $AB<4$. ∵ 点 A 表示实数 6，点 B 表示实数 b，∴ $|b-6|<4$，∴ $2<b<10$，故选 D.

11. 6 或 10 【解析】设⊙O 的直径为 d. 当点 P 在⊙O 外时，$d=8-2=6$，即⊙O 的直径为 6；当点 P 在⊙O 内时，$d=8+2=10$，即⊙O 的直径为 10. 故答案为 6 或 10.

关键点拨 分点 P 在圆内、圆外两种情况讨论：①当点 P 在圆内时，直径=最小距离+最大距离；②当点 P 在圆外时，直径=最大距离−最小距离.

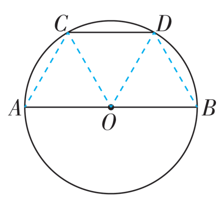
2　圆的对称性

刷基础

1. C 【解析】圆绕它的圆心旋转任意角度都会与原来的圆重合，故 C 选项不正确. 故选 C.

2. B 【解析】由圆心角的定义可知，只有 B 选项中的角是圆心角. 故选 B.

3. B 【解析】连接 AC，BD，OC，OD，如图. ∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $AC=CD=BD$，$\angle AOC=\angle COD=\angle BOD$. ∵ $\angle AOC+\angle BOD+\angle COD=180°$，∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=60°$. ∵ $OC=OD$，∴ $\triangle COD$ 是等边三角形，∴ $OC=CD=3$，∴ $AB=2OC=6$. 故选 B.

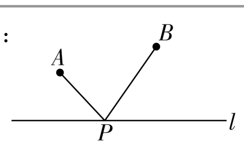


4. A 【解析】∵ D，C 是 $\overset{\frown}{BE}$ 的三等分点，∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，∴ $\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=34°$，∴ $\angle AOE=180°-\angle BOC-\angle COD-\angle DOE=180°-34°-34°-34°=78°$. 故选 A.

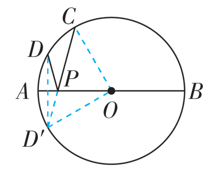
5. 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等 【解析】这种四等分圆周的方法的原理为在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，故答案为在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等.

6. $\sqrt{2}$

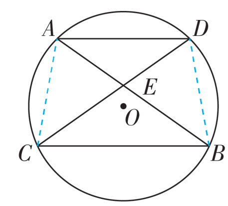
模型分析｜“将军饮马”模型

①提取模型：
②分析模型：A，B 为直线 l 同侧的两个定点，P 为动点. 现要在直线 l 上确定一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小
③确定模型：“将军饮马”模型
④确定辅助线作法：作出点 A（或点 B）关于直线 l 的对称点 A'（或 B'），连接 BA'（或 AB'）交直线 l 于点 P
⑤确定最值：$A'B$（或 AB'）的值即为 $PA+PB$ 的最小值

【解析】如图，作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 CD' 交 AB 于点 P，连接 OD'，OC，则 $PD=PD'$，此时 $PC+PD$ 的值最小，为 CD' 的长. ∵ 点 C 是半圆上的一个三等分点，点 D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，∴ $\angle AOC=180°\div3=60°$，∴ $\angle AOD'=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$，∴ $\angle COD'=\angle AOC+\angle AOD'=90°$. ∵ $OC=OD'=1$，∴ $CD'=\sqrt{2}$，即 $PC+PD$ 的最小值是$\sqrt{2}$.



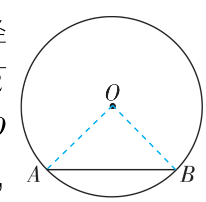
7. 【证明】如图，连接 AC，DB. ∵ $AB=CD$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$，∴ $BD=AC$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，∵ $AB=DC$，$AC=DB$，$CB=BC$，∴ $\triangle ABC\cong\triangle DCB$，∴ $\angle ABC=\angle DCB$，∴ $EB=EC$. ∵ $AB=DC$，∴ $EA=ED$，∴ $\angle EAD=\angle EDA$. ∵ $\angle CEB=\angle AED$，∴ $\angle ECB+\angle EBC=\angle EAD+\angle EDA$，即 $2\angle ABC=2\angle BAD$，∴ $\angle ABC=\angle BAD$，∴ $AD/\!/BC$.



刷易错

易错警示 在同一个圆中，一条弦所对的弧有两条，在弦的两侧.

8. D 【解析】如图，⊙O 是半径为 1 的圆，AB 是长度等于$\sqrt{2}$的弦，连接 OA，OB. ∵ 在⊙O 中，$AB=\sqrt{2}$，$OA=OB=1$，∴ $AB^2=OA^2+OB^2$，∴ $\triangle AOB$ 为直角三角形，且 $\angle AOB=90°$，即长度等于$\sqrt{2}$的弦所对的弧有两条：一条弧所对圆心角为 90°，另一条弧所对圆心角为 270°. 综上，长度等于$\sqrt{2}$的弦所对的弧的度数为 90°或 270°. 故选 D.



易错警示 当两条弧成 2 倍关系时，可以先将 2 倍弧所对的弦作出来，再比较弦长的大小关系. 本题易因想当然地认为弦长也是 2 倍关系而出错.

9. C 【解析】连接 BC. ∵ $\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{AB}$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，∴ $AB=BC$. ∵ $AB+BC>AC$，∴ $2AB>AC$. 故选 C.

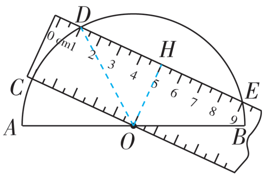
*3　垂径定理

刷基础

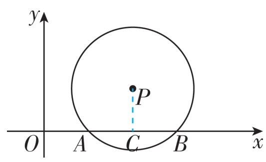
1. D 【解析】利用垂径定理易得 A 选项与 C 选项正确；由 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，得 $\angle AOE=\angle EOB$，所以 $\angle AOB=2\angle AOE$，所以 B 选项正确；根据题意得不到 $OD=DE$，所以 D 选项错误. 故选 D.

2. A 【解析】连接 OD，过点 O 作 $OH\perp DE$，垂足为 H，如图，∴ $DH=\frac{1}{2}DE=4$ cm. 在 Rt$\triangle DHO$

中，$\because OD=OC=5$ cm，$\therefore OH=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm)，$\therefore$ 直尺的宽度为 3 cm. 故选 A.



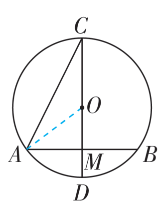
3. (6,0)　【解析】如图，过点 P 作 $PC\perp AB$ 于点 C. $\because$ 以点 P 为圆心的圆与 x 轴交于 A,B 两点，$\therefore AC=BC$. $\because$ 点 P 的坐标为(4,2)，点 A 的坐标为(2,0)，$\therefore$ 点 C 的坐标为(4,0)，



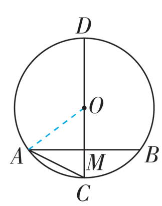
$\therefore AC=2$，$\therefore BC=2$，$\therefore OB=6$，$\therefore$ 点 B 的坐标为(6,0). 故答案为(6,0).

4. $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$　【解析】$\because AB\perp CD$，$\therefore AM=BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$. 连接 OA，在 Rt△OAM 中，$OA=5$，$\therefore OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 分两种情况讨论：①如图(1)，$CM=OC+OM=5+3=8$. 在 Rt△$ACM$ 中，$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$. ②如图(2)，$CM=OC-OM=5-3=2$. 在 Rt△$ACM$ 中，$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 综上所述，$AC$ 的长为 $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$.

思路分析
连接 OA，由 $AB\perp CD$，根据垂径定理得到 $AM=4$，再根据勾股定理计算出 $OM=3$，然后分类讨论：当如图(1)时，$CM=8$；当如图(2)时，$CM=2$. 再利用勾股定理分别计算即可得出答案.



图(1)



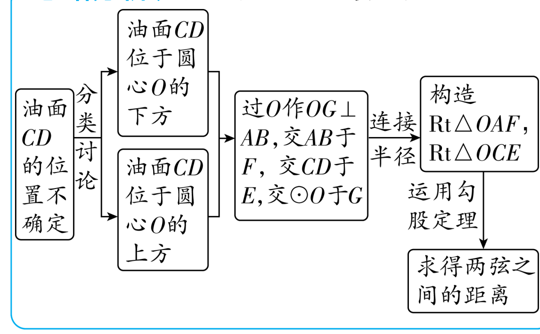
图(2)

5. B　【解析】$\because AD=CD=8$，$\therefore OB\perp AC$. 在 Rt△AOD 中，$OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，$\therefore OB=10$，$\therefore BD=10-6=4$. 故选 B.

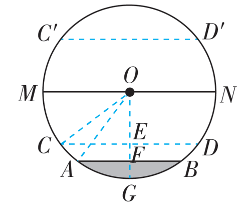
6. $\frac{10}{3}$　【解析】连接 OC. $\because CD=4$，M 是⊙O 的弦 CD 的中点，$\therefore CM=\frac{1}{2}CD=2$，$EM\perp CD$. 在 Rt△$COM$ 中，设 $OC=r$，则 $OM=EM-OE=6-r$，由勾股定理，得 $CM^2+OM^2=OC^2$，即 $2^2+(6-r)^2=r^2$，解得 $r=\frac{10}{3}$.

7. 100 或 700

思路分析｜与弦有关的分类讨论问题

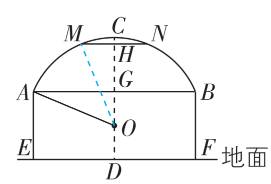


【解析】如图，过点 O 作 $OG\perp AB$ 交 AB 于 F，交⊙O 于 G，连接 OA，$\therefore AF=\frac{1}{2}AB=300$ 毫米. $\because$ 直径 $MN=1\ 000$ 毫米，$\therefore OA=OG=500$ 毫米. 在 Rt△OAF 中，由勾股定理得 $OF=\sqrt{OA^2-AF^2}=\sqrt{500^2-300^2}=400$(毫米). 油面宽变为 800 毫米，存在两种情况：①当油面 CD 在圆心 O 的下方时，连接 OC，令 OG 与 CD 交于 E. $\because OE\perp CD$，$\therefore CE=\frac{1}{2}CD=400$ 毫米，$\therefore OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{500^2-400^2}=300$(毫米)，$\therefore EF=OF-OE=400-300=100$(毫米). ②当油面 CD(即图中 $C'D'$)在圆心 O 的上方时，同理可得油面上升的高度为 $400+300=700$(毫米). 综上所述，如果再注入一些油后，油面宽变为 800 毫米，此时油面上升了 100 毫米或 700 毫米.



关键点拨
掌握垂径定理和勾股定理是解题的关键.

8.【解】(1)如图，设 AB 与 CD 交于点 G. 设⊙O 的半径 OA 的长为 r m，则 $OC=r$ m. 由题可知 $OC\perp AB$，$AB/\!/EF$，$AB=12$ m，$\therefore DG=AE$，$AG=\frac{1}{2}AB=6$ m. $\because AE=5$ m，$\therefore DG=5$ m. $\because CD=9$ m，$\therefore CG=CD-DG=9-5=4$(m)，$\therefore OG=OC-CG=(r-4)$m. 在Rt△$AOG$ 中，由勾股定理，得 $AG^2+OG^2=OA^2$，即 $6^2+(r-4)^2=r^2$，解得 $r=6.5$，$\therefore$ ⊙O 的半径 OA 的长是 6.5 m.



(2)如图，设 MN 与 CD 交于点 H，连接 OM. 由题可知 $OC\perp MN$，$HD=8.5$ m，$\therefore MN=2MH$，$GH=HD-DG=8.5-5=3.5$(m). $\because OG=6.5-4=2.5$(m)，$\therefore OH=OG+GH=2.5+3.5=6$(m). 在 Rt△$OHM$ 中，由勾股定理，得 $MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{6.5^2-6^2}=2.5$(m)，$\therefore MN=2MH=2\times2.5=5$(m)，$\therefore M,N$ 之间的水平距离是 5 m.

4 圆周角和圆心角的关系

课时 1 圆周角定理及其推论 1

刷基础

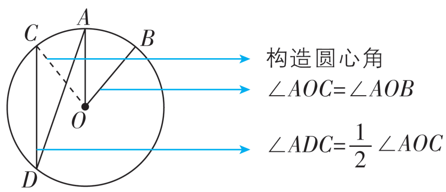
1. A 【解析】根据圆周角的定义可知，选项 A 中的角是圆周角. 故选 A.

2. C 【解析】∠1 和∠2 是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角，∠3 和∠4 是 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的圆周角，∠5 不是圆周角. 故选 C.

3. C

识图解题 | 思路分析

构造→转化→倍分

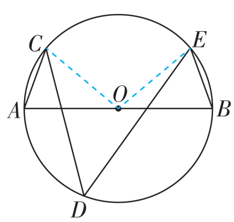


【解析】连接 CO. ∵ 在 ⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，∴ $\angle AOC=\angle AOB$. ∵ $\angle AOB=40°$，∴ $\angle AOC=40°$，∴ $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=20°$，故选 C.

4. D 【解析】连接 OC. ∵ $\angle ABC=19°$，∴ $\angle AOC=2\angle ABC=38°$. ∵ 半径 OA，OB 互相垂直，∴ $\angle AOB=90°$，∴ $\angle BOC=90°-38°=52°$，∴ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=26°$，故选 D.

关键点拨
连接 OC. 根据圆周角定理可得 $\angle AOC=2\angle ABC=38°$，进而求得 $\angle BOC$ 的度数，再利用圆周角定理即可求解.

5. D 【解析】如图，连接 OC，OE，∴ $OA=OC=OB=OE$. ∵ $\angle A=\angle B=70°$，∴ $\angle ACO=\angle BEO=70°$，∴ $\angle AOC=\angle BOE=180°-70°-70°=40°$，



∴ $\angle COE=180°-\angle AOC-\angle BOE=180°-40°-40°=100°$，∴ $\angle CDE=\frac{1}{2}\angle COE=50°$. 故选 D.

6. 【解】∵ $\angle A=22.5°$，∴ $\angle COB=2\angle A=45°$.
∵ $AB\perp CD$，∴ $CM=MD$，$\angle OMC=90°$.
在 Rt△OCM 中，$CM=OC\cdot\sin\angle COB=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，∴ $MD=2\sqrt{2}$.

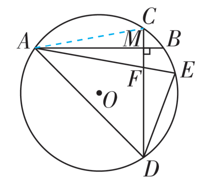
技巧点拨
在运用圆周角定理时，关键是找到圆周角或圆心角所对的弧，通过弧确定圆心角或圆周角，然后得到倍数关系.

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】在 Rt△ABC 中，$AC=1$，$AB=2$，∴ $\tan\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$. ∵ $\angle AED=\angle ABC$，∴ $\tan\angle AED=\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$.

8. (1)【证明】∵ $AB=CD$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，即 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BD}$，∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $\angle A=\angle D$，∴ $AM=DM$.

(2)【解】∠E 与∠DFE 相等. 理由如下：

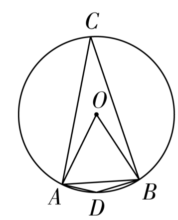
如图，连接 AC. ∵ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BC}$，∴ $\angle CAB=\angle EAB$. ∵ $AB\perp CD$，∴ 易得 $\triangle AMC\cong\triangle AMF$，∴ $\angle ACF=\angle AFC$.
∵ $\angle ACF=\angle E$，$\angle AFC=\angle DFE$，∴ $\angle DFE=\angle E$.



刷易错

9. 【解】青青的答案不正确，正确的答案为 30° 或 150°.

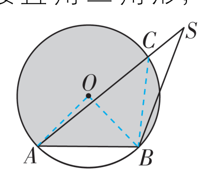
如图，∵ 弦 AB 的长等于半径，即 $OA=AB=OB$，∴ △ABO 是等边三角形，∴ $\angle AOB=60°$，∴ $\angle C=30°$. 又∵ 劣弧 AB 所对的圆心角为 60°，∴ 优弧 ACB 所对的圆心角为 300°，∴ $\angle ADB=150°$，∴ 弦 AB 所对的圆周角为 30° 或 150°.



易错警示
本题容易因考虑不周而漏解. 一条直径所对的圆周角有无数个，每个角都相等. 一条非直径的弦所对的圆周角也有无数个，这些圆周角有锐角和钝角两类，同一类型的圆周角相等，不同类型的两个圆周角互补.

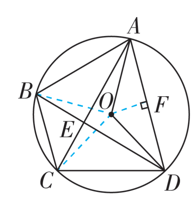
刷提升

1. D 【解析】如图，连接 OA，OB，BC. ∵ $AO=BO$，$AB=\sqrt{2}AO$，∴ △AOB 为等腰直角三角形，且 $\angle AOB=90°$. ∵ $\angle ACB$ 与 $\angle AOB$ 所对的弧都为 $\overset{\frown}{AB}$，∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=45°$.



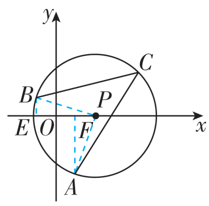
∵ $\angle ACB$ 为 △SCB 的一个外角，∴ $\angle ACB>\angle ASB$，即 $\angle ASB<45°$. 故选 D.

2. C 【解析】如图，连接 OB，OC. ∵ $BC\parallel AD$，∴ $\angle DBC=\angle ADB$. 又∵ $\angle DBC=\angle CAD$，∴ $\angle CAD=\angle BDA$. ∵ $DB\perp AC$，∴ $\angle AED=90°$，∴ $\angle CAD=\angle BDA=45°$，∴ $\angle AOB=2\angle ADB=90°$，$\angle COD=2\angle CAD=90°$. ∵ $\angle AOD=120°$，∴ $\angle BOC=360°-90°-90°-120°=60°$. ∵ $OB=OC$，∴ △OBC 是等边三角形，∴ $BC=OB$. ∵ $OA=OD$，$\angle AOD=120°$，∴ $\angle OAD=\angle ODA=30°$，∴ $\angle CAO=\angle CAD-\angle OAD=45°-30°=15°$. 过 O 点作 $OF\perp AD$ 于点 F，则 $OF=\frac{1}{2}OA$. 由勾股定理得 $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$，∴ $AD=2AF=\sqrt{3}OA=\sqrt{3}$，∴ $OA=1$，∴ $BC=1$. 故选 C.



3. (2，0) 【解析】如图，连接 PB，PA，过 B 作

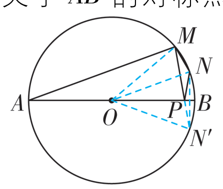
$BE\perp x$ 轴于 E，过 A 作 $AF\perp x$ 轴于 F. $\because A(m,-3)$，$B(-1,n)$，$\therefore OE=1$，$AF=3$. $\because \angle ACB=45°$，$\therefore \angle APB=90°$，$\therefore \angle BPE+\angle APF=90°$. $\because \angle BPE+\angle EBP=90°$，$\therefore \angle APF=\angle EBP$. $\because \angle BEP=\angle AFP=90°$，$PB=PA$，$\therefore \triangle BPE\cong\triangle PAF$(AAS)，$\therefore PE=AF=3$. 设 $P(a,0)$，$\therefore a+1=3$，$\therefore a=2$，$\therefore P(2,0)$，故答案为 $(2,0)$.



关键点拨 作辅助线构造全等三角形，先根据同弧所对的圆心角是圆周角的2倍得 $\angle APB=90°$，再证明 $\triangle BPE\cong\triangle PAF$，根据 $PE=AF=3$，列式可得结论.

4. 18° 【解析】连接 OC. $\because \angle ABC=\angle DBC$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$. $\because \overset{\frown}{CD}=\dfrac{1}{3}\overset{\frown}{BD}$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\dfrac{1}{4}\overset{\frown}{BC}$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\dfrac{1}{5}\overset{\frown}{ACB}$，$\therefore \angle AOC=\dfrac{1}{5}\times180°=36°$，$\therefore \angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle AOC=18°$. 故答案为 18°.

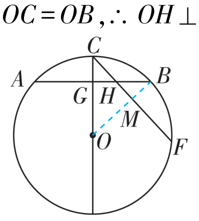
5. 5 【解析】如图，作点 N 关于 AB 的对称点 N'，连接 OM，ON，ON'，MN'，则 MN' 与 AB 的交点即为 $PM+PN$ 最小时 P 点的位置，$PM+PN$ 的最小值为 MN' 的长. $\because \angle MAB=20°$，$\therefore \angle MOB=2\angle MAB=2\times20°=40°$. $\because N$ 是 $\overset{\frown}{MB}$ 的中点，$\therefore \angle BON=\dfrac{1}{2}\angle MOB=\dfrac{1}{2}\times40°=20°$. 由对称性得 $\angle N'OB=\angle BON=20°$，$\therefore \angle MON'=\angle MOB+\angle N'OB=40°+20°=60°$. 又 $\because OM=ON'$，$\therefore \triangle MON'$ 是等边三角形，$\therefore MN'=OM=OB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times8=4$，$\therefore \triangle PMN$ 周长的最小值为 $1+4=5$，故答案为 5.



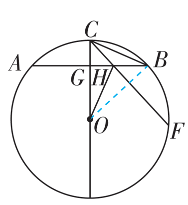
技巧点拨 当题目条件出现圆上一点和直径时，往往连接圆上的点与直径的端点，构造直角三角形求解.

6. (1)【解】如图(1)，连接 OB. $\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AB\perp CD$ 于点 G，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$AG=BG=\dfrac{1}{2}AB$. $\because B$ 为 $\overset{\frown}{CF}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$OB\perp CF$，$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BF}$，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$，$\therefore AB=CF=8$，$\therefore AG=BG=\dfrac{1}{2}AB=4$.

(2)【证明】如图(2)，连接 OB. 由(1)得 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore \angle CBH=\angle BCH$，$\therefore HB=HC$. 在 $\triangle OCH$ 和 $\triangle OBH$ 中，$\because OC=OB$，$HC=HB$，$OH=OH$，$\therefore \triangle OCH\cong\triangle OBH$(SSS)，$\therefore \angle COH=\angle BOH$. $\because OC=OB$，$\therefore OH\perp BC$.



图(1)



图(2)

7. (1)【证明】在 PC 上截取 $PD=PA$，连接 AD. $\because PC$ 平分 $\angle APB$，且 $\angle APB=120°$，$\therefore \angle APC=\angle BPC=60°$. $\because PA=PD$，$\therefore \triangle APD$ 为等边三角形，$\therefore DA=PA$. $\because \angle ABC=\angle APC=60°$，$\angle BAC=\angle BPC=60°$，$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore AB=AC$，$\angle CAB=\angle DAP=60°$，$\therefore \angle CAD=\angle BAP$，$\therefore \triangle ACD\cong\triangle ABP$，$\therefore PB=CD$. $\because PD+CD=PC$，$\therefore PA+PB=PC$.

(2)【解】当点 P 位于劣弧 AB 的中点时，$\triangle APB$ 的面积最大. 由(1)可知 $AC=BC$，当 P 为劣弧 AB 的中点时，$PA=PB$，$\therefore PC\perp AB$，$\therefore PC$ 为 $\odot O$ 的直径. 设 PC 与 AB 交于点 E. 连接 OA，易得 $\angle OAE=30°$. 又 $\because \odot O$ 的半径为 1，$\therefore OE=\dfrac{1}{2}$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AB=\sqrt{3}$，$PE=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \triangle APB$ 的最大面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

课时 2 圆周角定理的推论 2、3

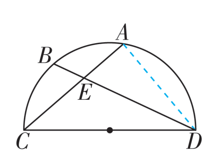
刷基础

1. D 【解析】$\because \angle C=20°$，$\angle BPC=70°$，$\therefore \angle BAC=\angle BPC-\angle C=50°$，$\therefore \angle BDC=50°$. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ADB=90°$，$\therefore \angle ADC=\angle ADB-\angle BDC=40°$，故选 D.

2. D 【解析】连接 BC. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 H，$\therefore \angle ACB=90°$，$CH=DH=\dfrac{1}{2}CD=2\sqrt{3}$. $\because \angle A=30°$，$\therefore AC=2CH=4\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\therefore AB=\dfrac{AC}{\cos 30°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$. 故选 D.

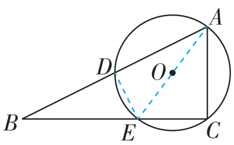
3. 5 【解析】连接 AB. $\because \angle ACB=90°$，$\therefore AB$ 为圆形镜子的直径. $\because CA=8$ cm，$CB=6$ cm，$\therefore AB=\sqrt{CA^2+CB^2}=10$ cm，$\therefore$ 该圆形镜子的半径为 $\dfrac{1}{2}\times10=5$(cm).

4. 40° 【解析】如图，连接 AD. $\because CD$ 是圆的直径，$\therefore \angle DAC=90°$. $\because B$ 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$\therefore \angle CDE=\angle EDA=25°$，$\therefore \angle ADC=50°$，$\therefore \angle ACD=90°-\angle ADC=40°$. 故答案为 40°.



5. $8\sqrt{5}$ 【解析】连接 AE，DE，如图. $\because \angle C=90°$，$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的直径，$AE=2\times5=10$，$\therefore \angle ADE=90°$，$\therefore DE\perp AB$. $\because AC=8$，$\therefore CE=$

$\sqrt{AE^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$. ∵ $AD=BD$, ∴ $BE=AE=10$, ∴ $BC=BE+CE=16$, ∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$. 故答案为 $8\sqrt{5}$.



刷有所得 “见直径，构造直径所对的圆周角”是常用且重要的添加辅助线的方法.

6.【解】(1) ∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle C=90°$. ∵ $\angle B=50°$, ∴ $\angle BAC=90°-\angle B=40°$. ∵ $OD/\!/BC$, ∴ $\angle AOD=\angle B=50°$. ∵ $OA=OD$, ∴ $\angle OAD=\frac{1}{2}(180°-\angle AOD)=\frac{1}{2}\times(180°-50°)=65°$, ∴ $\angle CAD=\angle OAD-\angle BAC=65°-40°=25°$.

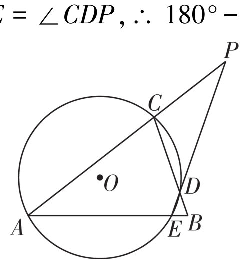
(2) 在 Rt△ABC 中, ∵ $AB=10$, $AC=8$, ∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6$. ∵ $OA=OB$, $OE/\!/BC$, ∴ OE 是△ABC 的中位线, ∴ $OE=\frac{1}{2}BC=3$. 又∵ $OD=\frac{1}{2}AB=5$, ∴ $DE=OD-OE=5-3=2$.

思路分析 (1)先求出$\angle CAB=40°$, $\angle DOA=50°$, 再利用等边对等角求出$\angle DAO=65°$, 最后计算$\angle CAD$的度数即可.
(2)利用勾股定理求出BC的长度, 证明OE是△ABC的中位线, 得出OE的长度, 最后利用$DE=OD-OE$计算即可.

7. D 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O, ∴ $\angle B+\angle D=180°$. 又∵ $\angle D-\angle B=40°$, ∴ $\angle B=70°$, ∴ $\angle AOC=2\angle B=140°$. 故选 D.

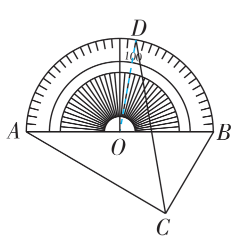
8. (1)【证明】∵ $AB=AC$, ∴ $\angle ABC=\angle C$. ∵ 四边形 $AEDC$ 为⊙O 的内接四边形, ∴ $\angle AED+\angle C=180°$. ∵ $\angle BED+\angle AED=180°$, ∴ $\angle BED=\angle C$, ∴ $\angle BED=\angle ABC$, ∴ $DB=DE$.

(2)【解】如图. ∵ $\angle BDE=\angle CDP$, ∴ $180°-\angle BDE=180°-\angle CDP$, ∴ $\angle DBE+\angle BED=\angle DCP+\angle P$. ∵ $\angle BED=\angle DBE$, $\angle DCP=180°-\angle ACB=180°-\angle ABC$, $\angle P=33°$, ∴ $2\angle DBE=180°-\angle ABC+33°$, ∴ $\angle ABC=71°$, ∴ $\angle A=180°-71°-71°=38°$, 故答案为 38°.



刷提升

1. B 【解析】设 AB 的中点为 O, 连接 OD, 如图所示. ∵ 以量角器的直径 AB 为斜边画直角三角形 ABC, ∴ A, C, B, D 四点共圆. ∵ 量角器上点 D 对应的读数是 100°, ∴ $\angle BOD=180°-100°=80°$, ∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=40°$, 故选 B.



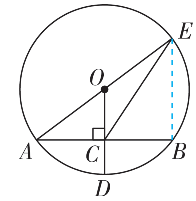
2. D

思路分析 | 圆与勾股定理的综合

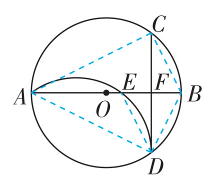
设⊙O的半径为R, 在圆中利用垂径定理求出AC, BC的长 → 在Rt△AOC中利用勾股定理求出OC的长 → 利用三角形的中位线定理求出BE的长 → 在Rt△BCE中利用勾股定理求出CE的长

由AE是直径, 可知$\angle ABE=90°$ → 在Rt△BCE中利用勾股定理求出CE的长

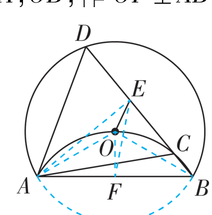
【解析】如图, 连接 BE. 设⊙O 的半径为 R. ∵ $OD\perp AB$, ∴ $AC=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$. 在 Rt△$AOC$ 中, $OA=R$, $OC=R-2$, ∴ 由勾股定理得 $(R-2)^2+4^2=R^2$, 解得 $R=5$, ∴ $OC=5-2=3$. ∵ $AO=OE$, ∴ OC 为△ABE 的中位线, ∴ $BE=2OC=6$. ∵ AE 为直径, ∴ $\angle ABE=90°$. 在 Rt△BCE 中, $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$. 故选 D.



3. C 【解析】如图, 连接 BC, BD, DE, AC, AD, 设 CD 交 AB 于点 F. ∵ $OA=5$, $EO=1$, ∴ $OB=5$, $AB=10$, ∴ $BE=OB-OE=4$. 由旋转得 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$, ∴ $AC=AD$. ∵ AB 为⊙O 的直径, ∴ $\angle ACB=\angle ADB=90°$, ∴ Rt△$ACB$≌Rt△$ADB$(HL), ∴ $BC=BD$, ∴ $AB\perp CD$, $CF=DF$, ∴ $\angle CFB=90°$. ∵ $\angle DAE=\angle BAD$, ∴ $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{BD}$, ∴ $DE=DB$, ∴ $BF=\frac{1}{2}BE=2$. ∵ $\angle ACB=\angle CFB=90°$, $\angle ABC=\angle CBF$, ∴ △ABC∽△CBF, ∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BF}$, 即 $\frac{10}{BC}=\frac{BC}{2}$, ∴ $BC^2=BD^2=20$. 在 Rt△BDF 中, $DF=\sqrt{BD^2-BF^2}=\sqrt{20-4}=4$, ∴ $CD=2DF=8$. 故选 C.

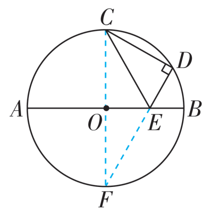


4. $\sqrt{3}-1$ 【解析】如图, 连接 OA, OB, 作 $OF\perp AB$ 于 F, 连接 AE, EF. ∵ $\overset{\frown}{AB}$ 沿着弦 AB 折叠, 正好经过圆心 O, ∴ $OF=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OB$, ∴ $\cos\angle AOF=\cos\angle BOF=\frac{1}{2}$, ∴ $\angle AOF=\angle BOF=60°$, ∴ $\angle AOB=120°$, ∴ $\angle ACB=120°$, $\angle D=\frac{1}{2}\angle AOB=60°$, ∴ $\angle ACD=180°-\angle ACB=60°$, ∴ △$ACD$ 是等边三角形. ∵ 点 E 是 CD 的中



点，∴ $AE\perp BD$. 又∵ $OF\perp AB$，∴ F 是 AB 的中点，∴ EF 是 Rt△ABE 斜边上的中线，∴ $AF=EF=BF$，即点 E 在以 F 为圆心，AB 长为直径的圆上，∴ 当 E,O,F 在同一直线上时，OE 长度最小，此时 $AB\perp EF$. ∵ ⊙O 的半径是 2，即 $OA=2$，$OF=1$，∴ $AF=\sqrt{3}$，∴ $OE=EF-OF=AF-OF=\sqrt{3}-1$. 故答案为 $\sqrt{3}-1$.

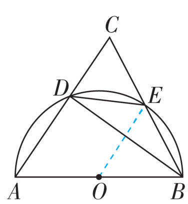
5. 7.5 【解析】如图，延长 DE 交⊙O 于点 F，连接 CF. ∵ $DE\perp CD$，∴ $\angle D=90°$，∴ CF 是⊙O 的直径.



∵ 点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，∴ $AB\perp CF$，∴ $CE=EF$.
∵ $\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{3}{4}$，∴ 设 $DE=3m$，则 $CD=4m$，$CE=EF=5m$，∴ $DF=DE+EF=8m$. 在 Rt△DCF 中，$CF=2\times5=10$，$CF^2=CD^2+DF^2$，即 $10^2=16m^2+64m^2$，∴ $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，∴ $CD=2\sqrt{5}$，$DE=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$，∴ $S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{3}{2}\sqrt{5}=7.5$. 故答案为 7.5.

6.【解】(1) ∵ AB 为半圆 O 的直径，∴ $\angle ADB=90°$，∴ $\angle BDC=90°$. 又∵ DE 平分 $\angle BDC$，∴ $\angle EDB=45°$，∴ $\angle ADE=\angle ADB+\angle BDE=90°+45°=135°$. 又∵ 四边形 $ABED$ 是半圆 O 的内接四边形，∴ $\angle ABE=180°-\angle ADE=180°-135°=45°$，∴ $\angle ABE$ 的度数为 45°.

(2) 如图，连接 OE. ∵ 点 E 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，∴ $DE=BE$，∴ $OE\perp BD$. 又∵ $AD\perp BD$，∴ $OE\parallel AD$，∴ $\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{BE}{CE}$，



∴ $BE=CE=\sqrt{3}$，∴ $BC=2\sqrt{3}$，$DE=BE=\sqrt{3}$.
∵ $\angle ABE=180°-\angle ADE=\angle CDE$，$\angle C=\angle C$，∴ △$CDE$∽△$CBA$，∴ $\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{DE}{BA}$，∴ $\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{BA}$，∴ $AB=3$，∴ $OB=\dfrac{3}{2}$，∴ 半圆 O 的半径为 $\dfrac{3}{2}$.

刷素养

7. (1)【解】∵ BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle ACD$，∴ $\angle E=\angle ECD-\angle EBD=\dfrac{1}{2}(\angle ACD-\angle ABC)=\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{1}{2}\alpha$.

(2)【证明】如图，延长 BC 到点 T.
∵ 四边形 $FBCD$ 内接于⊙O，

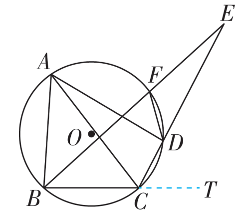
关键点拨

延长 DE 交⊙O 于点 F，连接 CF. 设 $DE=3m$，则 $CD=4m$，$CE=EF=5m$. 在 Rt△DCF 中，$CF=10$，利用勾股定理计算即可求解.

思路分析

(2) 延长 BC 到点 T，根据圆内接四边形的性质得到 $\angle FDC+\angle FBC=180°$，进而得到 $\angle FDE=\angle FBC$，再由角平分线的性质以及圆周角定理的推论得到 $\angle ABF=\angle FBC$，根据圆周角定理的推论得到 $\angle ACD=\angle BFD$，进而得到 $\angle ACD=\angle DCT$，根据遥望角的定义即可证明结论.

∴ $\angle FDC+\angle FBC=180°$.
又∵ $\angle FDE+\angle FDC=180°$，∴ $\angle FDE=\angle FBC$.
∵ DF 平分 $\angle ADE$，
∴ $\angle ADF=\angle FDE$.
∵ $\angle ADF=\angle ABF$，
∴ $\angle ABF=\angle FBC$，
∴ BE 是 $\angle ABC$ 的平分线.



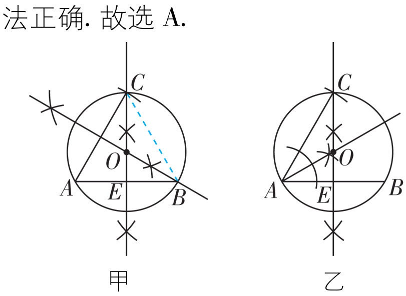
∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $\angle ACD=\angle BFD$. ∵ $\angle BFD+\angle BCD=180°$，$\angle DCT+\angle BCD=180°$，∴ $\angle DCT=\angle BFD$，∴ $\angle ACD=\angle DCT$，∴ CE 是△ABC 的外角平分线，∴ $\angle BEC$ 是△ABC 中 $\angle BAC$ 的遥望角.

5 确定圆的条件

刷基础

1. D 【解析】经过一个定点，以定长为半径，可以作无数个圆，原说法错误，故 A 不符合题意；经过两个定点，以定长为半径，圆心在两个定点所连线段的垂直平分线上，即能作 1 个或 2 个圆，原说法错误，故 B 不符合题意；经过不在同一条直线上的三个定点，只能作一个圆，原说法错误，故 C 不符合题意；经过三角形的三个顶点，只能作一个圆，原说法正确，故 D 符合题意. 故选 D.

2. A 【解析】甲：如图(1)，连接 BC. 由作图可知 $AB=AC$，CE 垂直平分线段 AB，∴ $AC=2AE$，∴ $\angle ACE=30°$，∴ $\angle A=60°$，∴ △ABC 是等边三角形，∴ $\angle ABC=60°$. 由作图可知 OB 垂直平分线段 AC，∴ BO 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle OBE=30°$，∴ $OB=\dfrac{EB}{\cos30°}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}r}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=r$，故甲的方法正确. 乙：如图(2). 由作图可知 $AB=AC$，CE 垂直平分线段 AB，∴ $AC=2AE$，∴ $\angle ACE=30°$，∴ $\angle CAE=60°$. 由作图可知 AO 平分 $\angle CAB$，∴ $\angle OAE=30°$，∴ $OA=\dfrac{AE}{\cos30°}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}r}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=r$，故乙的方法正确. 故选 A.



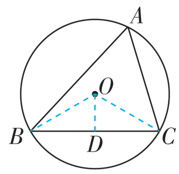
图(1) 图(2)

3. 10 【解析】在 Rt△ABC 中，∵ $\angle ACB=90°$，D 是 AB 的中点，$CD=5$，∴ $AB=2CD=10$，∴ △ABC 的外接圆的直径为 10.

刷有所得 锐角三角形的外心在三角形内部；直角三角形的外心是斜边的中点；钝角三角形的外心在三角形的外部.

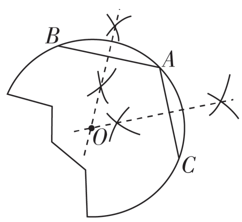
4. $(2,1)$ 【解析】连接 AB，BC，分别作线段 AB，BC 的垂直平分线，其交点即为圆心，坐标为 $(2,1)$.

5. $6\sqrt{3}$ 【解析】如图，连接 OB，OC，作 $OD\perp BC$ 于 D，∴ $OB=OC=6$，∴ $\angle OBD=\angle OCD$. 由垂径定理得 $BD=CD=\frac{1}{2}BC$，

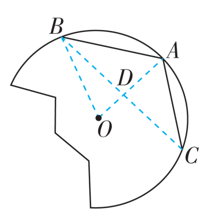


$\angle ODB=90°$. ∵ $\angle BAC=60°$，∴ $\angle BOC=2\angle BAC=120°$，∴ $\angle OBD=\angle OCD=\frac{180°-\angle BOC}{2}=30°$，∴ $OD=\frac{1}{2}OB=3$. ∵ $\angle ODB=90°$，∴ $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=3\sqrt{3}$，∴ $BC=6\sqrt{3}$. 故答案为 $6\sqrt{3}$.

6.【解】(1) 如图(1)所示，分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线交于点 O，点 O 即为所求的圆心.



图(1)

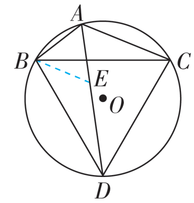


图(2)

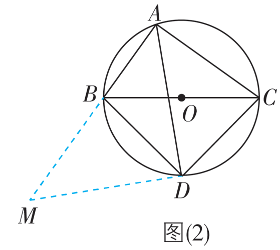
(2) 在图(1)的基础上连接 BC，AO，OB，AO 和 BC 交于点 D，如图(2)所示. ∵ $BC=16$ cm，$AB=AC$，AO 为半径，∴ $AO\perp BC$，∴ $CD=BD=8$ cm，$\angle ADB=90°$. ∵ $AB=10$ cm，∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6$ cm. 设该轮子所在圆的半径为 R cm，则 $OD=(R-6)$ cm. 在 Rt△BOD 中，$OB^2=OD^2+BD^2$，即 $R^2=8^2+(R-6)^2$，解得 $R=\frac{25}{3}$. 故该轮子所在圆的半径为 $\frac{25}{3}$ cm.

7.【解】(1) 如图(1)，在线段 AD 上截取 $AE=AB$，连接 BE. ∵ $\angle BAC=120°$，AD 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle BAD=\angle CAD=60°$.

∵ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $\angle DBC=\angle DAC=60°$. 同理，$\angle DCB=\angle DAB=60°$，∴ △$DBC$ 是等边三角形，∴ $BC=CD=DB$. ∵ $AB=AE$，$\angle BAE=60°$，∴ △ABE 是等边三角形，∴ $AB=BE=AE$，$\angle ABE=\angle DBC=60°$，∴ $\angle DBE=\angle ABC$，∴ △$BED\cong$△BAC，∴ $DE=AC$，∴ $AD=AE+DE=AB+AC$. 故答案为 $AB+AC=AD$.



图(1)



图(2)

(2) $AB+AC=\sqrt{2}AD$. 证明如下：

如图(2)，延长 AB 到点 M，使 $BM=AC$，连接 DM. ∵ 四边形 $ABDC$ 内接于⊙O，

∴ 易证 $\angle MBD=\angle ACD$.

∵ $\angle BAD=\angle CAD=45°$，∴ $BD=CD$，

∴ △$MBD\cong$△ACD(SAS)，∴ $MD=AD$，∴ $\angle M=\angle BAD=45°$，∴ $\angle ADM=90°$，∴ $AM=\sqrt{2}AD$，即 $AB+BM=\sqrt{2}AD$，∴ $AB+AC=\sqrt{2}AD$.

6 直线和圆的位置关系

课时 1 直线和圆的位置关系及切线的性质

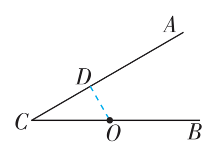
刷基础

1. C 【解析】∵ 圆心 $(3,4)$ 到 x 轴的距离是 4，到 y 轴的距离是 3，$4=4$，$3<4$，∴ 以点 $(3,4)$ 为圆心，4 为半径的圆与 x 轴相切，与 y 轴相交，故选 C.

2. C 【解析】∵ ⊙O_1，⊙O_2，⊙O_3，⊙O_4 是四个半径为 5 的等圆，由题图可知，⊙O_1 与直线 l 相切，⊙O_2 的圆心在直线 l 上，⊙O_3 与直线 l 相交，⊙O_4 与直线 l 相离，∴ 圆心到直线 l 的距离为 4 的可以是⊙O_3. 故选 C.

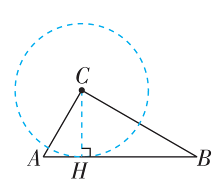
思路分析 根据直线与圆的位置关系，分析每个圆的圆心到直线的距离，找出符合条件的圆.

3. 2 【解析】如图，过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D，∴ $\angle CDO=90°$. ∵ $\angle ACB=30°$，$OC=6$，∴ $OD=\frac{1}{2}OC=3<4$，



∴ 以 4 为半径的⊙O 与直线 CA 的公共点的个数为 2. 故答案为 2.

4. (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $3<r\leqslant 3\sqrt{3}$ (3) $0<r<\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $r>3\sqrt{3}$ 【解析】(1) 作 Rt△ABC 如图所示，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H. 在 Rt△ABC 中，$AB=6$，$AC=3$，$\angle ACB=90°$，∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$. ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$，∴ $CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times 3\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴ 以点 C



为圆心作⊙C，当半径 $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，直线 AB 与⊙C 相切. 故答案为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

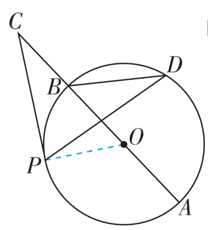
(2) 观察图形可知，当⊙C 与线段 AB 只有一个公共点时，半径 r 的取值范围为 $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $3<r\leqslant 3\sqrt{3}$，

故答案为 $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $3<r\leqslant 3\sqrt{3}$.

(3) 观察图形可知，当⊙C 与线段 AB 没有公共点时，半径 r 的取值范围为 $0<r<\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $r>3\sqrt{3}$，

故答案为 $0<r<\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $r>3\sqrt{3}$.

5. A 【解析】连接 OP，如图. ∵ CP 为⊙O 的切线，∴ $OP\perp PC$，∴ $\angle OPC=90°$. ∵ $\angle POC=2\angle BDP=2\times 29°=58°$，∴ $\angle C=90°-58°=32°$. 故选 A.

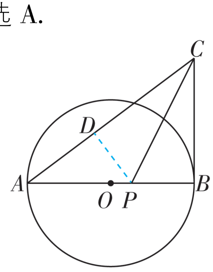


归纳总结

看见切点，连接切点和圆心，即可得到切线与所连半径垂直.

6. A 【解析】∵ CD 与⊙O 相切于点 D，∴ $CD\perp OD$. ∵ $BC\perp BD$，∴ $\angle ODC=\angle CBD=90°$，∴ $\angle ODB+\angle BDC=90°$，$\angle BCD+\angle BDC=90°$，∴ $\angle ODB=\angle BCD=25°$. ∵ $OD=OB$，∴ $\angle ABD=\angle ODB=25°$，故选 A.

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D，如图所示. ∵ AB 是⊙O 的直径，BC 切⊙O 于点 B，∴ $AB\perp BC$，∴ $\angle ABC=90°$.

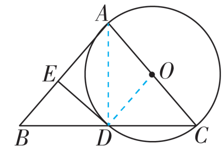


∵ $AC=5$，$BC=3$，∴ $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=4$，∴ $AO=BO=2$. ∵ CP 平分 $\angle ACB$，$PD\perp AC$，∴ $PD=PB$. ∵ $PC=PC$，∴ Rt$\triangle CPD\cong$Rt$\triangle CPB$ (HL)，∴ $CD=BC=3$，∴ $AD=5-3=2$. 设 $PD=PB=x$，则 $AP=4-x$. 根据勾股定理得 $AP^2=DP^2+AD^2$，∴ $(4-x)^2=x^2+2^2$，解得 $x=\frac{3}{2}$，

∴ $OP=OB-BP=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

8. (1)【证明】如图，连接 AD.
∵ AC 为直径，∴ $\angle ADC=90°$，即 $AD\perp BC$.
∵ 点 D 是 BC 的中点，
∴ AD 垂直平分 BC，
∴ $AB=AC$.

(2)【解】如图，连接 OD.



∵ DE 是⊙O 的切线，
∴ $\angle ODE=90°$.
∵ O，D 分别是 AC，BC 的中点，
∴ OD 是△ABC 的中位线，∴ $OD/\!/AB$，
∴ $\angle AED=90°$，∴ $\angle B+\angle BDE=90°$.
∵ $\angle BDE+\angle ADE=90°$，∴ $\angle B=\angle ADE$.
∵ $\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}=\tan B=\frac{DE}{BE}=2$，
∴ $DE=2BE=2$，∴ $AE=2DE=4$，
∴ $AC=AB=AE+BE=5$，∴ ⊙O 的半径为 $\frac{5}{2}$.

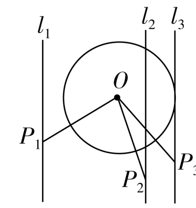
刷易错

易错警示

容易把直线上的点到圆心的距离当成圆心到直线的距离而导致错解.

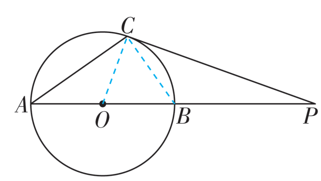
9. 相离或相切或相交

【解析】根据题意画图如右图. 直线 l 与⊙O 的位置关系有三种情况：相离或相切或相交.

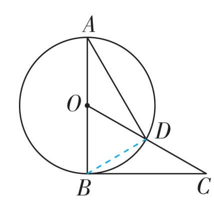


刷提升

1. A 【解析】连接 BC，OC，如图. ∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $\angle ACB=90°$. ∵ $\angle A=35°$，∴ $\angle ABC=90°-35°=55°$. ∵ $OB=OC$，∴ $\angle OCB=\angle ABC=55°$，∴ $\angle COB=180°-55°-55°=70°$. ∵ CP 为⊙O 的切线，∴ $\angle OCP=90°$，∴ $\angle P=90°-70°=20°$，故选 A.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 1 【解析】如图，连接 BD. ∵ $\angle A=30°$，∴ $\angle BOD=2\angle A=60°$. 又∵ $OB=OD$，∴ △BOD 是等边三角形，∴ $\angle OBD=60°$，$OA=OB=BD$，∴ $AB=2BD$. ∵ AB 是⊙O 的直径，$AD=\sqrt{3}$，∴ $\angle ADB=90°$，∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(2BD)^2-BD^2}=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}$，∴ $BD=1$. ∵ BC 与⊙O 相切于点 B，∴ $BC\perp OB$，∴ $\angle OBC=90°$，∴ $\angle DBC=90°-\angle OBD=30°$，$\angle C=90°-\angle BOD=30°$，∴ $\angle DBC=\angle C$，∴ $CD=BD=1$，故答案为 1.

3. $2\sqrt{2}$

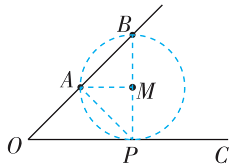
思路分析｜利用圆的性质求线段长

$\angle ACB=\angle FCB=\angle CED=\angle ODF=90°$ → 四边形$CEDF$为矩形 → $FD=CE$

在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$AB=6$ $\xrightarrow{\text{勾股定理}}$ BC的长 → CE的长 → FD的长

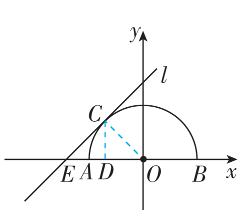
【解析】$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ACB=90°$，$\therefore \angle FCB=90°$. $\because DF$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OD\perp DF$. 又 $\because OD\perp BC$，$\angle FCB=90°$，$\therefore$ 四边形 $FCED$ 为矩形，$\therefore FD=EC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$AB=6$，则 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{2}$. $\because OD\perp BC$，$\therefore EC=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{2}$，$\therefore FD=2\sqrt{2}$. 故答案为 $2\sqrt{2}$.

4. 10 米 【解析】如图，过点 B 作 $BP\perp OC$ 交 OC 于点 P，以 BP 的中点 M 为圆心，$\frac{1}{2}BP$ 长为半径画圆，连接 AP，AM. $\because BP\perp OC$，$\therefore \angle OPB=90°$，$\therefore \angle OBP=90°-45°=45°$，$\therefore \triangle OPB$ 为等腰直角三角形，且 $OP=BP$. $\because A$ 为 OB 的中点，$\therefore AP\perp OB$，$\therefore \angle PAB=90°$，$\therefore \angle APB=90°-\angle OBP=90°-45°=45°$. $\because$ 点 M 为 BP 的中点，$\therefore AM=PM=BM=\frac{1}{2}BP$，$\therefore$ 点 A 在 $\odot M$ 上. $\because \odot M$ 与射线 OC 相切，$\angle APB=45°$，$\therefore$ 可知此时球员在射线 OC 上的 P 点射门时的张角最大，且最大张角为 $45°$，$\therefore OP^2+BP^2=OB^2$，$\therefore OP=10$ 米，故答案为 10 米.

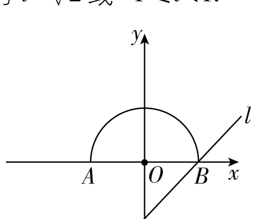


5. $t=\sqrt{2}$ 或 $-1\leq t<1$ 【解析】若直线 l 与半圆只有一个交点，分两种情况讨论：①直线 l 和半圆相切于点 C 时，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，连接 OC，则 $OC\perp$ 直线 l，令直线 l 与 x 轴交于 E，如图(1). 由题意易得 $\angle CEO=45°$，$OC=1$，$\therefore \angle COD=45°$. 又 $\because CD\perp AB$，$\therefore CD=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 把点 C 的坐标代入直线表达式，得 $t=y-x=\sqrt{2}$.

②从直线 l 过点 A 开始到直线过点 B 结束(不包括直线 l 过点 A)，如图(2). 由题意得 $OA=OB=1$，$\therefore A(-1,0)$，$B(1,0)$. 当直线 l 过点 A 时，把点 $A(-1,0)$ 代入直线表达式，得 $t=y-x=1$；当直线 l 过点 B 时，把点 $B(1,0)$ 代入直线表达式，得 $t=y-x=-1$，$\therefore -1\leq t<1$. 综上所述，当 $t=\sqrt{2}$ 或 $-1\leq t<1$ 时，直线 l 和半圆只有一个交点. 故答案为 $t=\sqrt{2}$ 或 $-1\leq t<1$.



图(1)



图(2)

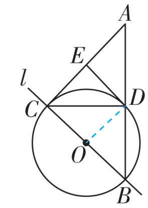
刷有所得

图形中的动态问题可以通过画出运动到不同位置时对应的图形来直观展示整个运动情况，进而明确符合题意的位置并求解.

关键点拨

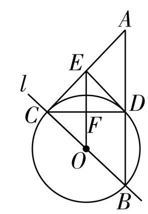
本题给出的是半圆，所以还存在直线从过点 A(不包括直线过点 A)到过点 B 的过程中与圆只有一个交点这种情况，若给出的是整个圆，那么就只存在直线和圆相切这一种情况.

6. (1)【证明】连接 OD，如图(1). $\because ED$ 与 $\odot O$ 相切于点 D，$\therefore \angle ODE=90°$，即 $\angle ODC+\angle EDC=90°$. $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle OCD+\angle ECD=90°$. $\because OD=OC$，$\therefore \angle OCD=\angle ODC$，$\therefore \angle ECD=\angle EDC$，$\therefore CE=DE$. $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle BDC=90°$，$\therefore \angle ADC=180°-90°=90°$，$\therefore \angle ECD+\angle A=90°$. 又 $\because \angle EDC+\angle ADE=90°$，$\angle ECD=\angle EDC$，$\therefore \angle A=\angle ADE$，$\therefore AE=DE$，$\therefore CE=AE$.



图(1)

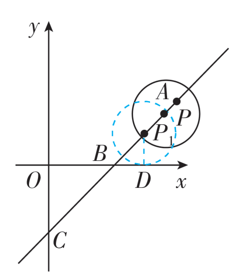
(2)【解】如图(2)，$\because \angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=6$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. $\because \angle ADC=\angle ACB=90°$，$\angle CAD=\angle BAC$，$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{AD}{8}=\frac{8}{10}$，$\therefore AD=\frac{32}{5}$. $\because BO=OC$，$AE=CE$，$\therefore OE/\!/AB$，$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle CAD$，$\therefore \frac{EF}{AD}=\frac{CE}{AC}=\frac{1}{2}$，$\therefore EF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times\frac{32}{5}=\frac{16}{5}$.



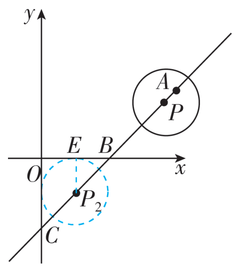
图(2)

刷素养

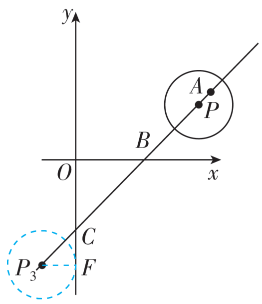
7. 2 或 6 或 10 【解析】$\because$ 直线 $y=x-4$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B，C，点 $A(8,m)$ 在直线 $y=x-4$ 上，$\therefore A(8,4)$，$B(4,0)$，$C(0,-4)$，$\therefore AB=4\sqrt{2}$，$AC=8\sqrt{2}$，$OB=OC=4$，$\therefore \tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=1$，$\therefore \angle OBC=45°$. ①当 $\odot P_1$ 只与 x 轴相切时，如图(1). 设 $\odot P_1$ 与 x 轴的切点为 D，连接 P_1D. $\because$ 点 D 是切点，$\odot P_1$ 的半径是 2，$\therefore P_1D\perp x$ 轴，$P_1D=2$. $\because \angle P_1BD=\angle OBC=45°$，$\therefore BD=P_1D=2$，$P_1B=2\sqrt{2}$，$\therefore AP_1=AB-P_1B=2\sqrt{2}$. $\because$ 点 P 的速度为每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度，$\therefore t=2$. ②当 $\odot P_2$ 与 x 轴、y 轴均相切时，如图(2). 设 $\odot P_2$ 与 x 轴的切点为 E，连接 P_2E. 同理可得 $BP_2=2\sqrt{2}$，$\therefore AP_2=AB+P_2B=6\sqrt{2}$，$\therefore t=6$. ③当 $\odot P_3$ 只与 y 轴相切时，如图(3). 设 $\odot P_3$ 与 y 轴的切点为 F，连接 P_3F. 同理可得 $P_3C=2\sqrt{2}$，$\therefore AP_3=AC+P_3C=10\sqrt{2}$，$\therefore t=10$. 综上所述，当 $t=2$ 或 6 或 10 时，$\odot P$ 与坐标轴相切.



图(1)



图(2)



图(3)

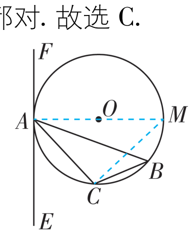
课时 2　切线的判定与三角形的内切圆

刷基础

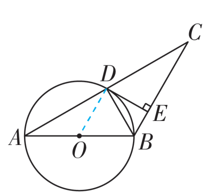
1. D　【解析】$\because$ $OD\perp a$，根据圆的切线的判定可知，以 OD 为半径的圆与直线 a 相切. 故选 D.

2. D　【解析】若 $\angle A=50°$，$\angle C=40°$，则 $\angle B=90°$，此时 BC 是⊙A 的切线，选项 A 不符合题意；若 $\angle B-\angle C=\angle A$，即 $\angle B=\angle A+\angle C$. 又 $\because$ $\angle B+\angle A+\angle C=180°$，$\therefore$ $\angle B=90°$，此时 BC 是⊙A 的切线，选项 B 不符合题意；若 $AB^2+BC^2=AC^2$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle B=90°$，此时 BC 是⊙A 的切线，选项 C 不符合题意；选项 D 不能判定 BC 是⊙A 的切线，符合题意. 故选 D.

3. C　【解析】当弦 AB 过点 O 时，$\because$ AB 是⊙O 的直径，$\therefore$ $\angle C=90°$，$\therefore$ $\angle B+\angle CAB=90°$. $\because$ $\angle EAC=\angle B$，$\therefore$ $\angle EAC+\angle CAB=90°$，$\therefore$ $\angle EAB=90°$，即 $EF\perp AB$. $\because$ OA 是半径，$\therefore$ EF 是⊙O 的切线. 当弦 AB 不过点 O 时，如图，作直径 AM，连接 CM，则 $\angle B=\angle M$(在同圆或等圆中，同弧所对的圆周角相等). $\because$ $\angle EAC=\angle B$，$\therefore$ $\angle EAC=\angle M$. $\because$ AM 是⊙O 的直径，$\therefore$ $\angle ACM=90°$，$\therefore$ $\angle CAM+\angle M=90°$，$\therefore$ $\angle EAC+\angle CAM=90°$，$\therefore$ $\angle EAM=90°$，$\therefore$ $EF\perp AM$. $\because$ OA 是半径，$\therefore$ EF 是⊙O 的切线. 故甲、乙都对. 故选 C.



4. (1)【证明】如图，连接 OD，则 $OD=OB$，$\therefore$ $\angle ODB=\angle ABD$. $\because$ AB 是⊙O 的直径，$\therefore$ $\angle ADB=90°$，$\therefore$ $BD\perp AC$. $\because$ D 是 AC 的中点，$\therefore$ $AD=CD$，$\therefore$ BD 垂直平分 AC，$\therefore$ $AB=CB$，$\therefore$ $\angle CBD=\angle ABD$，$\therefore$ $\angle ODB=\angle CBD$，$\therefore$ $OD/\!/BC$. $\because$ $DE\perp BC$ 于点 E，$\therefore$ $\angle ODE=\angle CED=90°$. $\because$ OD 是⊙O 的半径，$\therefore$ DE 是⊙O 的切线.

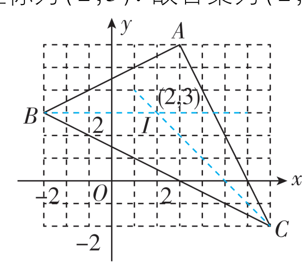


关键点拨 证出 $DC=BD$ 是解题的关键.

(2)【解】$\because$ $\angle ADB=90°$，$OA=2$，$\angle A=30°$，$\therefore$ $AB=2OA=4$，$\therefore$ $BD=\frac{1}{2}AB=2$，$\therefore$ $AD=CD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore$ $AC=2AD=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，$\therefore$ AC 的长为 $4\sqrt{3}$.

5. D　【解析】$\because$ 三角形内心是三角形三条角平分线的交点，$\therefore$ 四个选项中只有 D 选项符合题意. 故选 D.

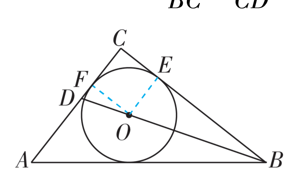
6. $(2,3)$　【解析】根据点 A,B,C 的坐标建立平面直角坐标系，如图，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 I，点 I 即为 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\triangle ABC$ 内心 I 的坐标为 $(2,3)$. 故答案为 $(2,3)$.



关键点拨 掌握三角形内心与外心的定义是解题的关键.

7. A　【解析】$\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle BOC=140°$，$\therefore$ $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$，$\therefore$ $\angle ACB+\angle ABC=180°-\angle A=110°$. $\because$ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore$ $\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55°$，$\therefore$ $\angle BIC=180°-(\angle IBC+\angle ICB)=125°$，故选 A.

8. $\frac{4}{5}$　【解析】设⊙O 的半径为 r，AC 切⊙O 于点 F，BC 切⊙O 于点 E. 如图，连接 OE，OF，则 $OE\perp BC$，$OF\perp AC$. $\because$ $\angle C=90°$，$\therefore$ $CD\perp BC$，$\therefore$ $OE/\!/CD$，$\therefore$ $\triangle BCD\backsim\triangle BEO$，$\therefore$ $\frac{BE}{BC}=\frac{EO}{CD}$. $\because$ $OE=OF$，$\angle C=\angle OEC=\angle OFC=90°$，$\therefore$ 四边形 $OECF$ 为正方形，$\therefore$ $OE=EC=r$，$\therefore$ $\frac{4-r}{4}=\frac{r}{1}$，解得 $r=\frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{4}{5}$.

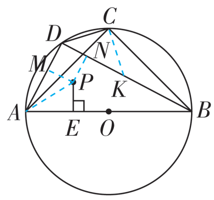


刷提升

关键点拨 证出 $DC=BD$ 是解题的关键.

1. B　【解析】$\because$ BD 与⊙O 相切，$\therefore$ $OB\perp BD$，$\therefore$ $\angle OBC+\angle CBD=90°$. $\because$ $OA\perp OD$，$\therefore$ $\angle OAC+\angle ACO=90°$. $\because$ $OA=OB$，$\therefore$ $\angle OAC=\angle OBC$，$\therefore$ $\angle CBD=\angle ACO$. $\because$ $\angle BCD=\angle ACO$，$\therefore$ $\angle BCD=\angle CBD$，$\therefore$ $BD=CD$，$\therefore$ $OD=OC+CD=1+BD$. $\because$ $OD^2=OB^2+BD^2$，$OB=OA=3$，$\therefore$ $(1+BD)^2=3^2+BD^2$，$\therefore$ $BD=4$. 故选 B.

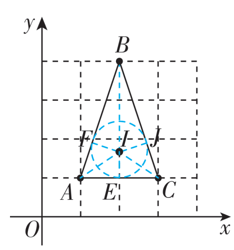
2. A 【解析】如图,过 P 作 $PM\perp AD$ 于 M,$PN\perp BD$ 于 N,连接 PA,在 BD 上截取 $BK=AD$,连接 CK. ∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,



∴ $\angle ACB=90°$, $AC=BC$. ∵ $\angle DAC=\angle CBK$, ∴ $\triangle CDA\cong\triangle CKB$(SAS), ∴ $CD=CK$, $\angle DCA=\angle KCB$. ∵ $\angle KCB+\angle ACK=90°$, ∴ $\angle DCA+\angle ACK=\angle DCK=90°$, ∴ $\triangle DCK$ 是等腰直角三角形, ∴ $DK=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$. ∵ P 是 $\triangle ADB$ 的内心, ∴ $PM=PN=PE$. ∵ $\angle MDN=\angle ACB=90°$, ∴ 四边形 $PMDN$ 是正方形, ∴ $DM=DN$. ∵ $PA=PA$, $PM=PE$, ∴ Rt$\triangle PMA\cong$Rt$\triangle PEA$(HL), ∴ $AM=AE$,同理可得 $BN=BE$, ∴ $BE-AE=BN-AM=(BN+DN)-(AM+DM)=BD-AD$. ∵ $BD-AD=BD-BK=DK=4$, ∴ $BE-AE=4$. 故选 A.

关键点拨 作辅助线构造全等三角形,进而求出 $DK=4$ 是解题的关键.

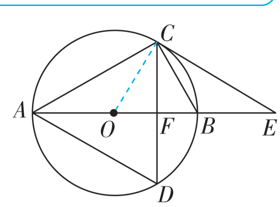
3. $\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$ 【解析】如图,设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 与 AB,BC,AC 分别相切于点 F,J,E,连接 IF,IJ,IE,BE,BI,AI,CI. ∵ $A(1,1)$,$B(2,4)$,$C(3,1)$, ∴ $AC=3-1=2$, $AB=\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$, $BC=\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$, ∴ $AB=CB$. ∵ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心, ∴ BI 平分 $\angle ABC$. ∵ $AB=CB$, ∴ BI 在 AC 的垂直平分线上. 又∵ $IE\perp AC$, ∴ B,I,E 三点在同一直线上,



∴ $E(2,1)$, ∴ $BE=4-1=3$. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径长为 r. ∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BE=S_{\triangle ABI}+S_{\triangle ACI}+S_{\triangle BCI}$, ∴ $\dfrac{1}{2}\times2\times3=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times r+\dfrac{1}{2}\times2\times r+\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times r$,解得 $r=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$,故答案为 $\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$.

4. **添加辅助线** 要证 CE 是 $\odot O$ 的切线,需证 CE 垂直于过点 C 的半径,故需连接半径 OC.

(1)【证明】如图,连接 OC. ∵ $OA=OC$, ∴ $\angle CAB=\angle ACO$. ∵ $\angle ECB=\angle CAB$, ∴ $\angle ECB=\angle ACO$.



∵ AB 是 $\odot O$ 的直径, ∴ $\angle ACB=90°$,即 $\angle ACO+\angle OCB=90°$, ∴ $\angle ECB+\angle OCB=90°$,即 $OC\perp EC$. 又∵ OC 是 $\odot O$ 的半径, ∴ EC 是 $\odot O$ 的切线.

(2)【解】∵ CB 平分 $\angle ECD$, ∴ $\angle BCD=\angle ECB$. ∵ $\angle BCD=\angle BAD$, ∴ $\angle ECB=\angle BAD$. 又∵ $\angle ECB=\angle CAB$, ∴ $\angle BAD=\angle CAB$. ∵ AB 是 $\odot O$ 的直径, ∴ $AB\perp DC$. 在 Rt$\triangle FCE$ 中, ∵ $BE=BC$, ∴ $\angle E=\angle ECB$, ∴ $\angle E=\angle ECB=\angle BCF=30°$. 在 Rt$\triangle BCF$ 中,$BC=6$,$\angle BCF=30°$, ∴ $CF=BC\cdot\cos\angle BCF=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. ∵ $AB\perp CD$,AB 是 $\odot O$ 的直径, ∴ $DF=CF=3\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle ADF$ 中,$\angle DAF=\angle BCF=30°$, ∴ $AD=\dfrac{DF}{\sin\angle DAF}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$.

刷素养

刷有所得 三角形的内心是三角形三条角平分线的交点.

5. (1)【解】如图(1),连接 BI,过 I 作 $IE\perp AB$ 于 E. 设 $ID=x$.

∵ $AB=AC=BC=6$,AI 平分 $\angle BAC$, ∴ $AD\perp BC$,$BD=CD=3$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$, ∴ $AI=3\sqrt{3}-x$.

∵ $\angle EBI=\angle DBI$,$\angle BEI=\angle BDI=90°$,$BI=BI$, ∴ $\triangle BEI\cong\triangle BDI$(AAS), ∴ $ID=IE=x$,$BD=BE=3$, ∴ $AE=3$.

在 Rt$\triangle AEI$ 中, ∵ $AE^2+EI^2=AI^2$, ∴ $3^2+x^2=(3\sqrt{3}-x)^2$, ∴ $x=\sqrt{3}$, ∴ $ID=\sqrt{3}$.

(2)①【证明】如图(2),连接 BI,CI.

∵ I 是 $\triangle ABC$ 的内心, ∴ $\angle ABI=\angle CBI$,$\angle ACI=\angle BCI$,$\angle MAI=\angle NAI$. ∵ $AI\perp MN$, ∴ $\angle AIM=\angle AIN=90°$.

在 $\triangle AMI$ 和 $\triangle ANI$ 中,$\begin{cases}\angle MAI=\angle NAI,\\AI=AI,\\\angle AIM=\angle AIN,\end{cases}$

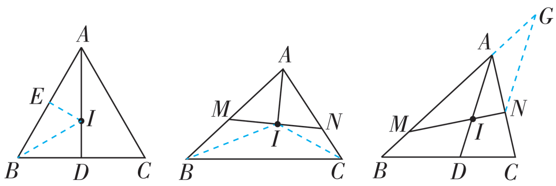
∴ $\triangle AMI\cong\triangle ANI$(ASA), ∴ $MI=NI$,$\angle AMN=\angle ANM$, ∴ $\angle BMI=\angle CNI$.

设 $\angle BAI=\angle CAI=\alpha$,$\angle ACI=\angle BCI=\beta$, ∴ $\angle NIC=90°-\alpha-\beta$.

∵ $\angle ABC=180°-2\alpha-2\beta$, ∴ $\angle MBI=90°-\alpha-\beta$,

∴ $\angle MBI=\angle NIC$, ∴ $\triangle BMI\backsim\triangle INC$, ∴ $\dfrac{BM}{NI}=\dfrac{MI}{NC}$, ∴ $NI\cdot MI=BM\cdot NC$.

∵ $NI=MI$, ∴ $MI^2=BM\cdot CN$.



图(1)　　图(2)　　图(3)

②【解】如图(3),过点 N 作 $NG//AD$ 交 MA 的延长线于 G. $\because I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心,$\angle BAC=60°$,$\therefore \angle BAI=\angle CAI=30°$.

$\because NG//AD$,$\therefore \angle ANG=\angle CAI=30°$,$\angle AGN=\angle BAI=30°$,$\therefore \angle ANG=\angle AGN$,$\therefore AN=AG$,易得 $NG=\sqrt{3}AN$.

$\because AI//NG$,$\therefore \triangle AMI\backsim\triangle GMN$,$\therefore \dfrac{AM}{MG}=\dfrac{AI}{NG}$,

$\therefore \dfrac{AM}{AM+AN}=\dfrac{4}{\sqrt{3}AN}$,$\therefore \dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

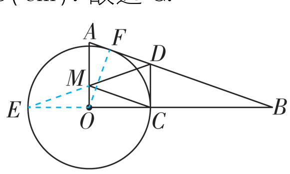
*7　切线长定理

刷基础

1. B　【解析】$\because AC,AP$ 分别切 $\odot O$ 于点 C,P,且 $AC=6$,$\therefore AP=AC=6$. 又 $\because AB=10$,$\therefore BP=AB-AP=4$. $\because BP,BD$ 分别切 $\odot O$ 于点 P,D,$\therefore BD=BP=4$. 故选 B.

2. C　【解析】由切线长定理可知,$PA=PB=8$ cm,$FA=FE$,$GB=GE$,$\therefore \triangle PFG$ 的周长是 $PF+PG+GF=PF+PG+EF+EG=PF+PG+FA+GB=PA+PB=8+8=16$(cm). 故选 C.

3. A　【解析】如图,延长 CO 交 $\odot O$ 于点 E,连接 ED,交 AO 于点 M,则 $MC=ME$,此时 $MC+MD$ 的值最小. $\because CD$ 长为定值,$\therefore MC+MD$ 的值最小时,$\triangle MCD$ 周长最小. 设 AB 与 $\odot O$ 相切于 F,连接 OF,则 $\angle OFB=90°$. $\because OC=1$,$\therefore OF=OC=1$,$\therefore BF=\sqrt{OB^2-OF^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$. $\because CD\perp OB$,OC 为 $\odot O$ 的半径,$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore DF=CD$. $\because \angle DCB=90°$,$\therefore CD^2+CB^2=BD^2$,



$\therefore CD^2+(3-1)^2=(2\sqrt{2}-CD)^2$,解得 $CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore DE=\sqrt{CD^2+CE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(1+1)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,$\therefore \triangle MCD$ 周长最小值为 $DC+MD+MC=DC+MD+ME=DC+DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,故选 A.

关键点拨 熟练掌握切线长定理并正确作出辅助线是解题的关键.

4. 219　【解析】连接 AB. $\because PA,PB$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore PA=PB$. $\because \angle P=102°$,$\therefore \angle PAB=\angle PBA=\dfrac{1}{2}(180°-102°)=39°$. $\because \angle DAB+\angle C=180°$,$\therefore \angle PAD+\angle C=\angle PAB+\angle DAB+\angle C=39°+180°=219°$.

5. 6　【解析】$\because PA,PB$ 是 $\odot O$ 的切线,切点分别为 A,B,$\therefore PA=PB$. 又 $\because CD$ 切 $\odot O$ 于点 E,$\therefore CA=CE,DE=DB$. $\because \triangle PCD$ 的周长为 12,$\therefore PC+CD+PD=PC+CE+DE+PD=PC+CA+DB+PD=PA+PB=12$,$\therefore 2PA=12$,$\therefore PA=6$. 故答案为 6.

6. (1)【证明】过 O 作 $OH\perp AC$ 于 H,则 $\angle OHA=90°$,$\therefore \angle AOH+\angle OAC=90°$. $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore \angle OAP=90°$,$\therefore \angle OAC+\angle PAC=90°$,$\therefore \angle AOH=\angle PAC$. $\because OA=OC$,$\therefore \angle AOC=2\angle AOH$,$\therefore \angle AOC=2\angle PAC$.

(2)【解】延长 AC 交 PB 于 E. $\because PA,PB$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore OB\perp PB$,$PA=PB$. $\because AC//OB$,$\therefore AC\perp PB$,$\therefore$ 四边形 $OBEH$ 是矩形,$\therefore OH=BE$,$HE=OB=5$. $\because OH\perp AC$,$OA=OC$,$\therefore AH=CH=\dfrac{1}{2}AC=3$,$\therefore OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=4$,$\therefore BE=OH=4$. $\because AE=AH+HE=8$,$PA^2=AE^2+PE^2$,$\therefore PA^2=8^2+(PA-4)^2$,$\therefore PA=10$.

7. 48　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的外切四边形,四边形 $ABCD$ 各边分别切 $\odot O$ 于点 E,F,G,H,$\therefore AE=AH$,$BE=BF$,$CF=CG$,$DH=DG$,$\therefore AD+BC=AB+CD=24$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $AD+BC+AB+CD=24+24=48$. 故答案为 48.

关键点拨 正确找到点 M 的位置是解题的关键.

8.【解】设圆外切四边形顺次相连的三边长的比是 3∶4∶5 的三边长分别为 $3x,4x,5x(x>0)$.
因为该四边形的周长为 48,圆外切四边形的对边之和相等,所以一组对边的和是 $48\div2=24$,所以 $3x+5x=24$,解得 $x=3$,所以该四边形顺次相连的三边长分别是 $3\times3=9$,$4\times3=12$,$5\times3=15$,三边的总长是 $9+12+15=36$,所以第四条边的长是 $48-36=12$. 综上,四边形各边的长分别是 9,12,15,12.

大招专题 5　圆中常见的辅助线

刷难关

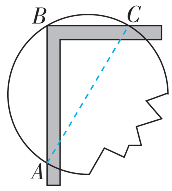
大招解读 | **作直径构造直角三角形**

看到圆周角,想到连接弦,若弦是直径即可证圆周角是直角. 反之,若圆周角是直角可得弦是直径.

1. $\frac{13}{2}$

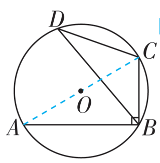
思路分析｜作直径构造直角三角形

$\angle ABC$为直角→ AC为直径
↓
连接AC→(勾股定理)求AC的长
↓
半径为$\frac{1}{2}AC$

【解析】连接 AC，如图.


$\because \angle ABC=90°$，且$\angle ABC$是圆周角，$\therefore AC$是圆形镜面的直径. 由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$(cm)，

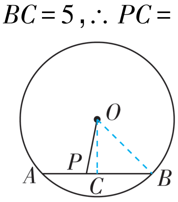
$\therefore$ 圆形镜面的半径为$\frac{13}{2}$ cm.

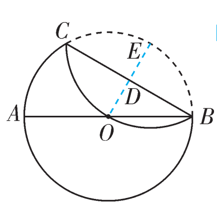
2. A 【解析】如图，连接 AC，则


$\angle CAB=\angle BDC=30°$. $\because AB\perp BC$，$\therefore \angle ABC=90°$，$\therefore AC$为$\odot O$的直径. $\because \angle ABC=90°$，$\angle CAB=30°$，$BC=4$，$\therefore AC=2BC=8$，$\therefore \odot O$的半径为$\frac{8}{2}=4$. 故选 A.

思路分析
连接 AC，根据直角所对的弦为直径，以及同弧所对的圆周角相等，得到 AC 为直径，$\angle CAB=30°$，进而求出 AC 的长即可求得半径.

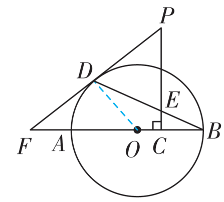
大招解读｜遇弦作弦心距
看到弦(不是直径)及过弦的端点的半径，想到作弦心距，构造出直角三角形，然后利用勾股定理解决求线段长问题.

3. D 【解析】如图，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C，连接 OB，则 $OB=7$. $\because PA=4$，$PB=6$，$\therefore AB=PA+PB=10$. $\because OC\perp AB$，$\therefore AC=BC=5$，$\therefore PC=PB-BC=1$. 在 Rt$\triangle OBC$ 中，根据勾股定理得 $OC^2=OB^2-BC^2=7^2-5^2=24$. 在 Rt$\triangle OPC$ 中，根据勾股定理得 $OP=\sqrt{OC^2+PC^2}=\sqrt{24+1}=5$，故选 D.


4. $2\sqrt{3}$ 【解析】过点 O 作 $OD\perp BC$，垂足为 D，延长 OD 交 $\overset{\frown}{BC}$ 于点 E，如图，则 $CD=BD=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$. 由折叠得 $OD=DE=\frac{1}{2}OE$. $\because OE=OB$，$\therefore OD=\frac{1}{2}OB$. 在 Rt$\triangle ODB$ 中，$OD^2+DB^2=OB^2$，$\therefore \left(\frac{1}{2}OB\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=OB^2$，解得 $OB=\sqrt{3}$，$\therefore AB=2OB=2\sqrt{3}$，故答案为 $2\sqrt{3}$.


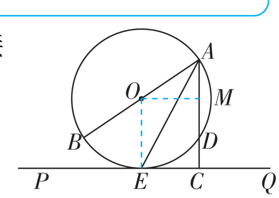
思路分析
过点 O 作 $OD\perp BC$，垂足为 D，延长 OD 交 $\overset{\frown}{BC}$ 于点 E，根据垂径定理可得 $CD=BD=\frac{3}{2}$，再根据折叠的性质可得 $OD=DE=\frac{1}{2}OE$，从而可得 $OD=\frac{1}{2}OB$，然后在 Rt$\triangle ODB$ 中，利用勾股定理进行计算，即可解答.

大招解读｜连半径，证垂直，得切线
证切线，想到证 90° 角，连半径，构造等腰三角形，利用等腰三角形的性质和圆的性质进行角度转换求解.

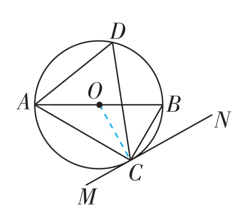
5. (1)【证明】如图，连接 OD. $\because OB=OD$，$\therefore \angle ODB=\angle OBD$. $\because PD=PE$，$\therefore \angle PDE=\angle PED$. $\because PC\perp AB$，$\therefore \angle OBD+\angle BEC=90°$. $\because \angle BEC=\angle PED$，$\therefore \angle PDE=\angle BEC$，$\therefore \angle ODP=\angle ODB+\angle PDE=90°$，$\therefore OD\perp PD$. $\because OD$ 为半径，$\therefore PD$ 是$\odot O$的切线.


(2)【解】$\because \cos\angle PFC=\frac{4}{5}$，$\therefore \frac{FC}{PF}=\frac{DF}{OF}=\frac{4}{5}$. $\because DF=4$，$\therefore OF=5$. $\because PE=\frac{7}{2}$，$\therefore PD=PE=\frac{7}{2}$，$\therefore PF=DF+PD=\frac{15}{2}$，$\therefore \frac{FC}{\frac{15}{2}}=\frac{4}{5}$，解得 $FC=6$，$\therefore OC=FC-OF=6-5=1$.

大招解读｜遇切线，连半径，得垂直
见切点(内切圆)，想到连接圆心和切点，得到垂直关系.

6. (1)【证明】如图，连接 OE. $\because OA=OE$，$\therefore \angle OEA=\angle OAE$. $\because PQ$ 切$\odot O$于 E，$\therefore OE\perp PQ$. $\because AC\perp PQ$，$\therefore OE/\!/AC$，$\therefore \angle OEA=\angle EAC$，$\therefore \angle OAE=\angle EAC$，$\therefore AE$ 平分$\angle BAC$.


(2)【解】如图，过点 O 作 $OM\perp AC$ 于 M，则 $AM=MD=\frac{1}{2}AD$. $\because AD=EC=2$，$\therefore AM=MD=1$. 又$\because \angle OEC=\angle ACE=\angle OMC=90°$，$\therefore$ 四边形 $OECM$ 为矩形，$\therefore OM=EC=2$. 在 Rt$\triangle AOM$ 中，$OA=\sqrt{OM^2+AM^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 故$\odot O$的半径为$\sqrt{5}$.

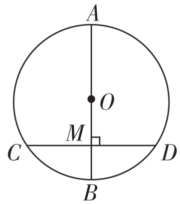
7. C 【解析】如图所示，连接 OC. $\because$ 直线 MN 切$\odot O$于 C 点，$\therefore \angle OCN=90°$，$\therefore \angle OCB+\angle BCN=90°$. $\because OB=OC$，$\therefore \angle OBC=\angle OCB$，$\therefore \angle OBC+\angle BCN=90°$. $\because \angle ADC=\angle ABC$，$\therefore \angle ADC+\angle BCN=90°$. $\because AB$ 为$\odot O$的直径，$\therefore \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACM+\angle BCN=90°$. $\because$ 度数之和为 90 度的两个角互为余角，$\therefore$ 图中与$\angle BCN$互余的角有$\angle ADC$，$\angle ACM$，$\angle OBC$，共 3 个，故选 C.


大招专题 6　圆中的最值问题

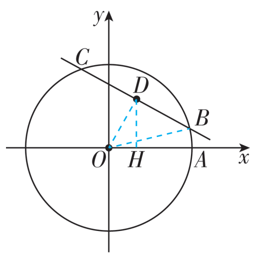
刷难关

大招解读｜利用圆的性质求最值

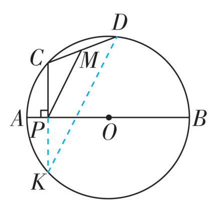
如图，过圆内一定点 M 的所有弦中，直径 AB 最长，与直径垂直的弦 CD 最短.



1. $4\sqrt{3}$　【解析】如图所示，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H，连接 OD，OB，则 $OH=2$，$DH=3$，$\therefore$ 根据勾股定理得 $OD=\sqrt{OH^2+DH^2}=\sqrt{13}$. $\because$ 点 $A(5,0)$，$\therefore OA=5$，$\therefore OB=OA=5$. $\because$ 过圆内定点 D 的所有弦中，与 OD 垂直的弦最短，$\therefore$ 由垂径定理及勾股定理可得 BC 的最小值为 $2BD=2\sqrt{OB^2-OD^2}=2\times\sqrt{25-13}=4\sqrt{3}$，故答案为 $4\sqrt{3}$.



2. 4　【解析】如图，延长 CP 交⊙O 于点 K，连接 DK. $\because AB\perp CK$，$\therefore CP=PK$. $\because M$ 是 CD 的中点，$\therefore PM$ 是△CKD 的中位线，$\therefore PM=\dfrac{1}{2}KD$，$\therefore$ 当 KD 的值最大时，PM 的值最大，即当 KD 为直径时，PM 的值最大. $\because$ ⊙O 的直径 $AB=8$，$\therefore PM$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}KD=\dfrac{1}{2}AB=4$，故答案为 4.

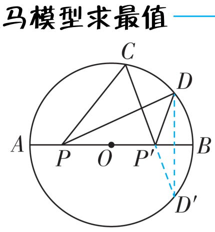


思路分析

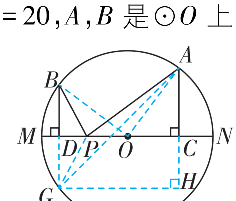
延长 CP 交⊙O 于点 K，连接 DK，根据垂径定理可得 $CP=PK$，再根据三角形中位线定理可得 $PM=\dfrac{1}{2}KD$，进而可得当 KD 的值最大时，PM 的值最大，即当 KD 为直径时，PM 的值最大，即可求解.

大招解读｜利用将军饮马模型求最值

已知 C，D 为⊙O 上直径同侧两点，P 为直径 AB 上一动点，求 $PC+PD$ 的最小值. 如图，作点 D 关于 AB 的对称点 D'，连接 CD' 交 AB 于点 P'，则 $P'D=P'D'$，故当点 P 与点 P'重合时，$PC+PD$ 取得最小值，最小值为 CD'的长.



3. B　【解析】如图，连接 OA，OB. $\because AC\perp MN$，$BD\perp MN$，$\therefore OB^2=BD^2+OD^2=36+OD^2$，$OA^2=AC^2+OC^2=64+OC^2$. $\because MN=20$，A，B 是⊙O 上的两点，$\therefore OA=OB=\dfrac{1}{2}MN=10$，$\therefore 100=36+OD^2$，$100=64+OC^2$，$\therefore OD=8$，$OC=6$，$\therefore CD=OD+OC=14$. 延长 BD 与⊙O 相交于点 G，连接 GP，AG. $\because MN$ 为⊙O 的直径，$BD\perp MN$，$\therefore BD=GD=6$，$\therefore BP=GP$，$\therefore PA+PB=PA+GP$，$\therefore$ 当点 P 在直线 AG 上时，$PA+PB$ 取最小值，且最小值为 AG 的长. 过 G 作 $GH\perp AC$ 交 AC 的延长线于点 H. 又$\because AC\perp MN$，$BD\perp MN$，$\therefore$ 四边形 $CDGH$ 是矩形，$\therefore GH=CD=14$，$CH=DG=6$，$\therefore AH=AC+CH=14$，$\therefore AG=\sqrt{AH^2+GH^2}=\sqrt{14^2+14^2}=14\sqrt{2}$，$\therefore PA+PB$ 的最小值是 $14\sqrt{2}$，故选 B.

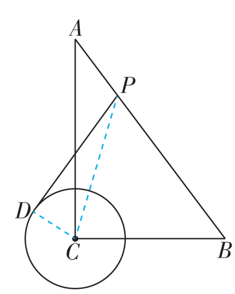


大招解读｜利用圆外点到圆的距离求最值

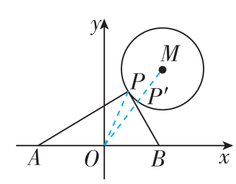
(1) 已知直线及圆上一动点求最值，想到过圆心作直线的垂线.

(2) 已知圆外一定点及圆上一动点求最值，想到连接定点与圆心.

4. $\dfrac{\sqrt{119}}{5}$　【解析】连接 DC，PC，如图. $\because PD$ 为⊙C 的一条切线，$\therefore PD\perp DC$，$\therefore PD=\sqrt{PC^2-DC^2}$. $\because DC$ 为半径，其长是定值，$\therefore$ 当 PC 最小时，PD 取得最小值. 由垂线段最短可知，当 $PC\perp AB$ 时，PC 最小. $\because \angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，$\therefore AB=5$. $\because \dfrac{1}{2}PC\cdot AB=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC$，$\therefore 5PC=12$，$\therefore PC=\dfrac{12}{5}$，$\therefore PD=\sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{119}}{5}$，$\therefore$ 线段 PD 长的最小值为$\dfrac{\sqrt{119}}{5}$，故答案为$\dfrac{\sqrt{119}}{5}$.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. $(-3,0)$　【解析】如图，连接 OP，连接 OM 交⊙M 于点 P'. $\because$ 点 M 的坐标为 $(3,4)$，$\therefore OM=\sqrt{3^2+4^2}=5$. $\because PA\perp PB$，$\therefore \angle APB=90°$. $\because AO=BO$，$\therefore AB=2PO$. 若要使 AB 最短，则 PO 需取得最小值. 当点 P 位于 P'位置时，OP 取得最小值. $\because OM=5$，$MP'=2$，$\therefore OP'=3$，$\therefore OA=3$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3,0)$，故答案为 $(-3,0)$.

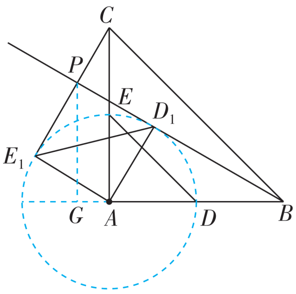
关键点拨

连接 OP，连接 OM 交⊙M 于点 P'. 根据点 M 的坐标，利用勾股定理求出 OM 长，再根据直角三角形斜边中线的性质，以及关于原点对称的点的坐标特点知 $AB=2OP$，得到当 PO 最短时，AB 最短是解题关键.

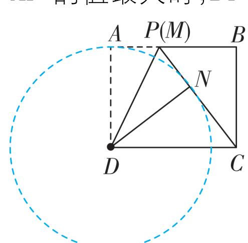
大招解读｜利用直线与圆的特殊位置关系求最值

已知动点与定直线求最值，动点的轨迹是圆，想到利用直线与圆的位置关系，通常在相切时取得最值.

6. $1+\sqrt{3}$　【解析】由题意知 D_1，E_1 在以 A 为圆心，AD 为半径的圆上，如图，当 BD_1 所在直线与⊙A 相切时，直线 BD_1 与 CE_1 的交点 P 到直线 AB 的距离最大，过点 P 作 $PG\perp$ 直线 AB，此时四边形 AD_1PE_1 是正方形，则 $PD_1=2$，$BD_1=\sqrt{AB^2-AD_1^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，故 $\angle ABP=30°$，$PB=2+2\sqrt{3}$，故点 P 到 AB 所在直线的距离的最大值为 $PG=\dfrac{PB}{2}=1+\sqrt{3}$，故答案为 $1+\sqrt{3}$.



7. 10　$2\sqrt{5}$　【解析】由题意可得 $\triangle CDP$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的一半，∴ $\triangle CDP$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times4\times5=10$. 在 Rt$\triangle APD$ 中，$PD=\sqrt{AD^2+AP^2}$，∴ 当 AP 的值最大时，DP 有最大值. 由题意可得点 N 在以 D 为圆心，4 为半径的圆弧上运动，当射线 CN 与圆 D 相切时，AP 的值最大，此时 P，M 两点重合，C，N，M 三点共线，如图. 由题意可得 $AD=ND=4$，$\angle DNC=\angle B=\angle DCB=90°$，∴ $\angle NDC+\angle DCN=90°$，$\angle DCN+\angle MCB=90°$，∴ $\angle NDC=\angle MCB$. ∵ $AD=BC$，∴ $DN=BC$，∴ $\triangle NDC\cong\triangle BCM$，∴ $CN=BM=\sqrt{CD^2-DN^2}=3$，∴ $AP=AB-BP=2$，∴ 在Rt$\triangle APD$ 中，$PD=\sqrt{AD^2+AP^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 故答案为 10，$2\sqrt{5}$.

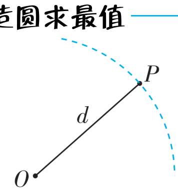


关键点拨　根据勾股定理得到当 AP 的值最大时，DP 有最大值是解题关键.

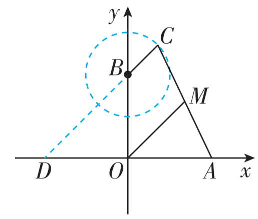
大招解读｜利用定点定长构造圆求最值

已知定点和定长，想到动点的轨迹是以定点为圆心，定长为半径的圆.

如图，动点 P 到定点 O 的距离为定值 d，则点 P 的轨迹为以点 O 为圆心，d 为半径的圆.



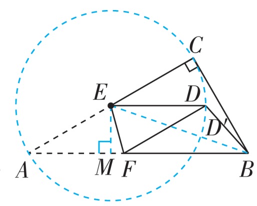
8. C　【解析】如图，∵ 点 C 为坐标平面内一动点，$BC=2$，∴ C 在以 B 为圆心，2 为半径的圆上运动. 取 $OD=OA=4$，连接 BD，CD. ∵ $AM=CM$，$OD=OA$，∴ OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线，



∴ $OM=\dfrac{1}{2}CD$，∴ 当 CD 的值最大时，OM 的值最大. 当 C 在 DB 的延长线上时，CD 的值最大，故此时 OM 的值最大. ∵ $OB=OD=4$，$\angle BOD=90°$，∴ $BD=4\sqrt{2}$，∴ $CD=4\sqrt{2}+2$，∴ $OM=\dfrac{1}{2}CD=2\sqrt{2}+1$，即 OM 的最大值为 $2\sqrt{2}+1$. 故选 C.

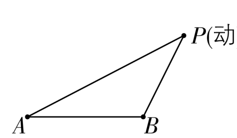
关键点拨　根据题意可知，点 C 在半径为 2 的⊙B 上运动，通过画图可知，C 在 DB 的延长线上时，OM 的值最大，即可求解.

9. $8+2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$　【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=4$，∴ $AB=8$，∴ 由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4\sqrt{3}$. ∵ 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折得到 $\triangle DEF$，点 E 是 AC 的中点，∴ $AF=DF$，$AE=DE=2\sqrt{3}$，∴ $\triangle BDF$ 的周长为 $BF+DF+BD=BF+AF+BD=AB+BD=8+BD$，∴ 当 BD 的值最小时，$\triangle BDF$ 的周长最小. 如图，以点 E 为圆心，AE 长为半径作圆，连接 BE，交圆 E 于点 D'，此时，BD 的值最小，为 BD' 的长. 过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，∴ $EM=\dfrac{1}{2}AE=\sqrt{3}$，∴ 由勾股定理得 $AM=\sqrt{AE^2-EM^2}=3$，∴ $BM=AB-AM=8-3=5$，∴ 由勾股定理得 $BE=\sqrt{EM^2+BM^2}=2\sqrt{7}$，∴ $BD'=BE-D'E=2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$，∴ $\triangle BDF$ 周长的最小值为 $8+2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$. 故答案为 $8+2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$.

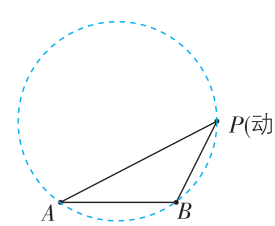


大招解读｜利用定弦定角构造圆求最值

已知定弦和弦所对的角为定值，想到动点的轨迹是以定直线为弦的圆.



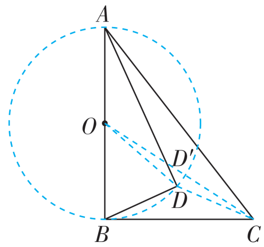
固定线段 AB 所对动角 $\angle P$ 为定值，则点 P 运动轨迹为过 A，B，P 三点的圆



原理：弦 AB 所对的同侧圆周角恒相等

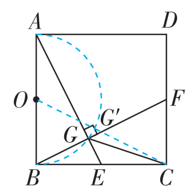
备注：点 P 在优弧、劣弧上运动皆可

10. C 【解析】∵ Rt△ABC 中，∠ABC = 90°，BC = 3，AC = 5，∴ 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 如图，取 AB 的中点 O. ∵ ∠DBC=∠BAD，∠DBC+∠ABD=90°，∴ ∠BAD+∠ABD=90°，∴ ∠ADB=90°，∴ D 点在以 O 为圆心，OA 为半径的圆上运动. 连接 OC 交圆于点 D'，连接 OD，DC. 当 O，D，C 三点在同一直线上时，CD 最短，此时 $OD=OD'=OA=2$. 在 Rt△OCB 中，由勾股定理，得 $OC=\sqrt{BC^2+OB^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，故 CD 的最小值为 $OC-OD'=\sqrt{13}-2$，故选 C.

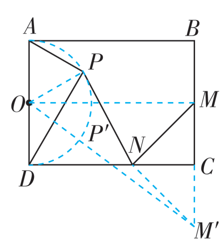


思路分析 取 AB 的中点 O，由∠DBC=∠BAD 及∠ABC=90°，得出∠ADB=90°，可得 D 点在以 O 为圆心，OA 为半径的圆上运动，连接 OD，OC，当 O，D，C 三点在同一直线上时，CD 最短.

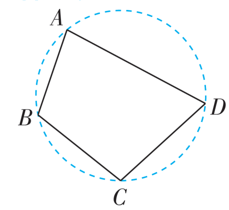
11. $3\sqrt{5}-3$ 【解析】取 AB 的中点 O，以 O 为圆心，AB 为直径画半圆弧，如图. 根据题意可知，点 G 在该半圆弧上运动. 根据题意易得当 O，G，C 三点在同一条直线上时，CG 取得最小值. 连接 OC 交半圆弧于点 G'，CG' 的长即为 CG 的最小值. ∵ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，∴ $AB=BC=6$，∠ABC=90°，∴ $OA=OB=OG'=\frac{1}{2}AB=3$. 在 Rt△$BOC$ 中，$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，∴ CG 的最小值为 $CG'=OC-OG'=3\sqrt{5}-3$. 故答案为 $3\sqrt{5}-3$.



12. 7 【解析】取 AD 的中点 O，如图所示. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ ∠BAD=90°. ∵ ∠ADP=∠PAB，∴ ∠ADP+∠PAD=∠PAB+∠PAD=∠BAD=90°，∴ ∠APD=90°，∴ 点 P 在以点 O 为圆心，AD 为直径的半圆弧上运动. 作点 M 关于直线 DC 的对称点 M'，连接 OM' 交半圆弧于点 P'，连接 $M'N$，OP，则 $OP=OP'=\frac{1}{2}AD=3$，$M'N=MN$，∴ $PN+MN=PN+M'N=PN+M'N+OP-OP'\geqslant OM'-OP'=OM'-3$，∴ $PN+MN$ 的最小值为 $OM'-3$. 连接 OM. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，点 O 是 AD 的中点，点 M 为 BC 的中点，∴ $OD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=CM=3$，$OD\parallel CM$，∠$ODC$=90°，∴ 四边形 $OMCD$ 是矩形，∴ $OM=DC=AB=8$. ∵ 点 M' 是点 M 关于直线 DC 的对称点，∴ $M'M=2MC=6$. 在 Rt△$M'OM$ 中，由勾股定理，得 $OM'=\sqrt{OM^2+M'M^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，∴ $PN+MN$ 的最小值为 $OM'-3=10-3=7$. 故答案为 7.



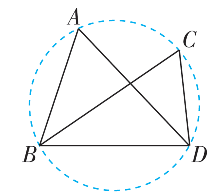
大招解读｜利用四点共圆求最值



图(1)

对角互补型：

如图(1)，若∠A+∠C=180°或∠B+∠D=180°，则 A，B，C，D 四点共圆



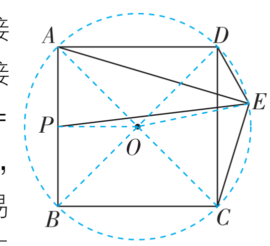
图(2)

同侧等角型：

如图(2)，若∠A=∠C，则 A，B，C，D 四点共圆

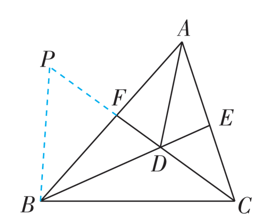
关键点拨 根据两点之间线段最短得出 $PE\leqslant OP+OE$，进而推得当点 O 在线段 PE 上时 PE 的值最大是解题关键.

13. D 【解析】如图，连接 AC，BD 交于点 O，连接 PO，EO. ∵ ∠AED = 45°，∠ACD=45°，∴ A，C，E，D 四点共圆，易知点 O 即为圆心. ∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6，∴ $OE=OD=\frac{1}{2}BD=3\sqrt{2}$. ∵ P 为 AB 的中点，O 是 BD 的中点，∴ $OP=\frac{1}{2}AD=3$. ∵ $PE\leqslant OP+OE=3+3\sqrt{2}$，∴ 当点 O 在线段 PE 上时，PE 最大，$PE=OP+OE=3+3\sqrt{2}$，即线段 PE 的最大值为 $3+3\sqrt{2}$. 故选 D.



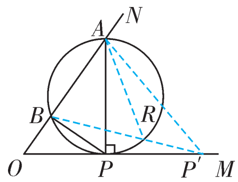
思路分析 由 A，E，D，F 四点共圆，得到 $DE=DF$，再证明△CDE∽△CAF，得到 AF 与 AC 的比，延长 CF 到 P，使 $DP=DB$，连接 PB，得到△BDP 为等边三角形，再证明△AFC∽△PFB，得到 PF 与 PB 的比，即可求解.

14. C 【解析】∵ ∠BAC=60°，∠BDC = 120°，∴ ∠EDF = 120°，∴ ∠FAE+∠EDF = 180°，∴ A，E，D，F 四点共圆. ∵ AD 平分∠BAC，∴ ∠DAE = ∠DAF，∴ $DE=DF=6$. ∵ ∠BDC = 120°，∴ ∠BDF=∠CDE=60°=∠FAC. ∵ ∠DCE=∠ACF，∴ △CDE∽△CAF，∴ $AF:AC=DE:CD=DF:CD=3:5$. 如图，延长 CF 到 P，使 $DP=DB$，连接 PB. ∵ ∠PDB=60°，∴ △BDP 为等边三角形，∴ ∠P=60°，∴ △AFC∽△PFB，∴ $PF:PB=AF:AC=3:5$，∴ 设 $PB=5k$，则 $PD=BD=5k$，$PF=3k$，∴ $DF=2k=6$，∴ $k=3$，∴ $BD=5k=15$. 故选 C.



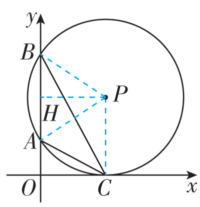
大招解读｜利用米勒定理求最值

已知点 A,B 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 P 是边 OM 上的一个动点，则当且仅当 $\triangle ABP$ 的外接圆与边 OM 相切于点 P 时，$\angle APB$ 最大.



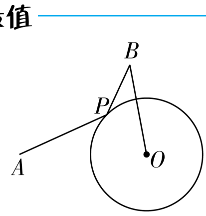
证明：如图，在边 OM 上任取一点 P'（不与 P 点重合），连接 AP',BP',BP' 与圆相交于点 R，连接 AR，$\therefore \angle APB=\angle ARB>\angle AP'B$（利用三角形外角性质），$\therefore$ 当圆与 OM 相切时，$\angle APB$ 最大.

15. B　【解析】过点 A,B 作 $\odot P$，当 $\odot P$ 与 x 轴相切于点 C 时，$\angle ACB$ 最大，连接 PA,PB,PC，作 $PH\perp y$ 轴于 H，如图. $\because$ 点 A,B 的坐标分别是 $(0,1),(0,3)$，$\therefore OA=1,AB=3-1=2.\because PH\perp AB,\therefore AH=BH=1,\therefore OH=2.$ $\because \odot P$ 与 x 轴相切于点 C，$\therefore PC\perp x$ 轴，$\therefore$ 四边形 $PCOH$ 为矩形，$\therefore PC=OH=2,\therefore PA=2.$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAH$ 中，$PH=\sqrt{PA^2-AH^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore OC=\sqrt{3}$，$\therefore C$ 点坐标为 $(\sqrt{3},0)$. 故选 B.



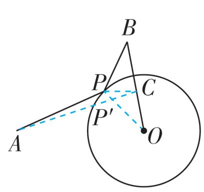
大招解读｜利用阿氏圆求最值

模型：如图(1)，已知点 P 是半径为 r 的 $\odot O$ 上一动点，点 A,B 为 $\odot O$ 外两定点，且 $r=k\cdot OB\,(0<k<1)$，连接 PA,PB，则当“$PA+k\cdot PB$”的值最小时，P 点的位置如何确定？



图(1)

作法：①如图(2)，将系数不为 1 的线段(PB)两端点分别与圆心相连，即连接 OP；



图(2)

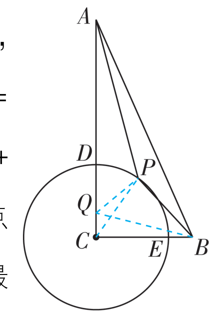
②计算出线段 OP 与 OB 的长度比 $\frac{OP}{OB}=k$；

③在 OB 上取一点 C，连接 PC，使得 $\frac{OC}{OP}=\frac{OP}{OB}=k$，即构造 $\triangle POC\backsim\triangle BOP$，则 $\frac{PC}{PB}=k$，即 $PC=k\cdot PB$；

④将“$PA+k\cdot PB$”的最小值转化为“$PA+PC$”的最小值，连接 AC，与 $\odot O$ 交于点 P'，利用“两点之间线段最短”转化为 AC 的长，点 P' 即为所求.

巧记：计算 $PA+k\cdot PB$ 的最小值时，利用两边成比例且夹角相等构造子母型相似三角形.

16. $\sqrt{17}$　【解析】在 AC 上截取 $CQ=\frac{1}{3}CD=1$，连接 CP,PQ,BQ，如图. $\because AC=9,CP=3,CQ=1$，$\therefore \frac{CP}{AC}=\frac{CQ}{CP}=\frac{1}{3}$，$\therefore \triangle ACP\backsim\triangle PCQ$，$\therefore PQ=\frac{1}{3}AP$，$\therefore \frac{1}{3}PA+PB=PQ+PB\geqslant BQ$，$\therefore$ 当 B,P,Q 三点共线时，$\frac{1}{3}PA+PB$ 的值最小，为 BQ 的长. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCQ$ 中，$BC=4,CQ=1$，$\therefore QB=\sqrt{17}$，$\therefore \frac{1}{3}PA+PB$ 的最小值为 $\sqrt{17}$. 故答案为 $\sqrt{17}$.



思路分析　在 AC 上截取 $CQ=\frac{1}{3}CD=1$，连接 CP,PQ,BQ，构造 $\triangle ACP\backsim\triangle PCQ$，得 $PQ=\frac{1}{3}AP$，将 $\frac{1}{3}PA+PB$ 的最小值转换为 $PQ+PB$ 的最小值，由两点之间线段最短得出当 P,B,Q 三点共线时 $PQ+PB$ 的值最小，进而求解.

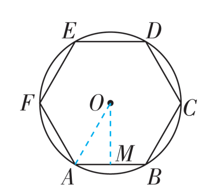
8　圆内接正多边形

刷基础

1. B　【解析】A 选项，正多边形是轴对称图形，每条边的垂直平分线是它的对称轴，说法正确，故此选项不合题意；B 选项，边数为奇数的正多边形不是中心对称图形，原说法错误，故本选项符合题意；C 选项，正多边形每一个外角都等于正多边形的中心角，说法正确，故本选项不合题意；D 选项，正多边形每一个内角都与正多边形的中心角互补，说法正确，故本选项不合题意. 故选 B.

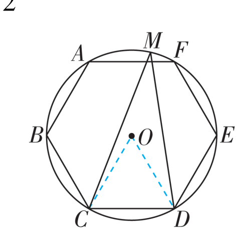
2. C　【解析】由甲的作图步骤易得 $EF=AF=AB=BC=CD=DE$，$\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，即甲的作图步骤正确. 由乙的作图步骤可知 $OA=AB=BC=CD=ED=EF=AF$，$\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形，即乙的作图步骤正确. 故选 C.

3. D　【解析】如图，连接 OA，过点 O 作 $OM\perp AB$，则 $\angle AOM=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{6}=30^\circ$，$\therefore OM=OA\cdot\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$，$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ 的边心距是 $\sqrt{3}$ cm，故选 D.

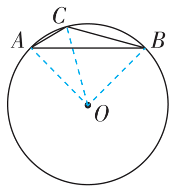


4. C　【解析】连接 OC,OD，如图. $\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，$\therefore \angle COD=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$\therefore \angle CMD=\frac{1}{2}\angle COD=30^\circ$，故选 C.

关键点拨　由正六边形的性质得出 $\angle COD=60^\circ$，由圆周角定理求出 $\angle CMD=30^\circ$.



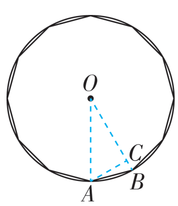
5. 12 【解析】如图，连接 OA，OB，OC. 由题意，得 $\angle AOB=\dfrac{360°}{4}=90°$，$\angle BOC=\dfrac{360°}{6}=60°$，$\therefore \angle AOC=\angle AOB-\angle BOC=30°$，$\therefore n=\dfrac{360°}{30°}=12$，故答案为 12.



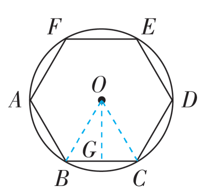
6. $\pi-3$ 【解析】$\because$ $\odot O$ 的半径为 1，$\therefore$ $\odot O$ 的面积 $S=\pi$. 易得圆的内接正十二边形的中心角为 $\dfrac{360°}{12}=30°$. 如图，连接 OA，OB，过 A 作 $AC\perp OB$，则 $AC=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 圆的内接正十二边形的面积 $S_1=12\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=3$，$\therefore S-S_1=\pi-3$，故答案为 $\pi-3$.

关键点拨

求出圆的内接正十二边形的面积 S_1 是解题的关键.



7.【解】(1)如图，连接 OB，OC. $\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，$\therefore \angle BOC=\dfrac{360°}{6}=60°$. $\because OB=OC$，



$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形，$\therefore BC=OB=4$ m，

$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ 的周长为 $6\times4=24$(m).

(2)如图，过点 O 作 $OG\perp BC$ 于点 G.

$\because \triangle OBC$ 是等边三角形，$OB=4$ m，

$\therefore \angle OBC=60°$，

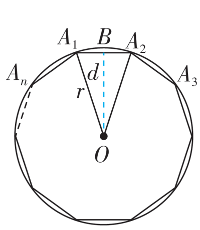
$\therefore OG=OB\cdot\sin\angle OBC=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$(m)，

$\therefore S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot OG=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$($m^2$)，

$\therefore S_{正六边形ABCDEF}=6S_{\triangle OBC}=6\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$($m^2$).

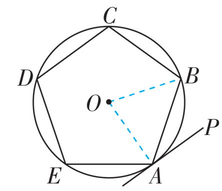
刷提升

1. D 【解析】①$\because \alpha=\dfrac{360°}{n}$，$\therefore \alpha$ 是 n 的反比例函数，故①正确. ②如图，过点 O 作 $OB\perp A_1A_2$ 于点 B. $\because OA_1=OA_2$，$\therefore \angle BOA_1=\dfrac{1}{2}\angle A_1OA_2=\dfrac{1}{2}\alpha$，$\therefore d=r\cdot\cos\dfrac{1}{2}\alpha$. $\because \alpha$ 为定值，即 $\cos\dfrac{1}{2}\alpha$ 为定值，$\therefore d$ 是 r 的正比例函数，故②正确.



③$\because n$ 为定值，$\alpha=\dfrac{360°}{n}$，$\therefore \alpha$ 为定值. $\because \dfrac{1}{2}A_1A_2=BA_1=r\cdot\sin\dfrac{1}{2}\alpha$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}A_1A_2\cdot d=r\cdot\sin\dfrac{1}{2}\alpha\cdot r\cdot\cos\dfrac{1}{2}\alpha=\left(\sin\dfrac{1}{2}\alpha\cdot\cos\dfrac{1}{2}\alpha\right)\cdot r^2$，$\therefore S$ 为 r 的二次函数，故③正确. 故选 D.

2. B 【解析】如图，连接 OA，OB. $\because$ 多边形 $ABCDE$ 为 $\odot O$ 的内接正五边形，$\therefore \angle BOA=\dfrac{360°}{5}=72°$.

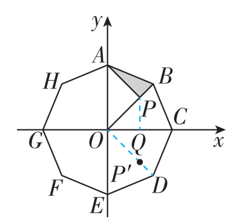


$\because OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\dfrac{1}{2}(180°-\angle AOB)=54°$. $\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A，$\therefore OA\perp AP$，$\therefore \angle OAP=90°$，$\therefore \angle PAB=90°-\angle OAB=36°$，故选 B.

关键点拨

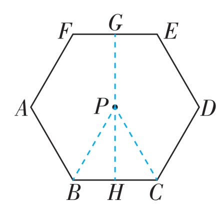
连接 OA，OB，先求出 $\angle BOA=72°$，再求出 $\angle OAB=54°$，最后根据切线的性质求出 $\angle OAP=90°$，进而求解.

3. B 【解析】$\because$ 八边形 $ABCDEFGH$ 是正八边形，$\therefore \angle AOB=360°\div8=45°$. $\because OA=6$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle APO$ 中，$OP=OA\cdot\cos45°=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$. 如图，过点 P 作



x 轴的垂线，垂足为 Q，易知 $\angle POQ=45°$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle OPQ$ 中，$OQ=OP\cdot\cos45°=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$，$\therefore PQ=OQ=3$，$\therefore$ 点 P 的坐标为(3，3). $\because$ 将 $\triangle APB$ 绕点 O 顺时针旋转，每次旋转 45°，$\therefore$ 每旋转 8 次回到初始位置. 连接 OD. $\because 106\div8=13\cdots\cdots2$，$\therefore$ 第 106 次旋转结束时点 P' 在 OD 上. 由旋转得 $OP'=OP$，$\angle P'OQ=\angle POQ=45°$，$\therefore$ 易得点 P' 与点 P 关于 x 轴对称，$\therefore P'(3,-3)$，$\therefore$ 第 106 次旋转结束时，点 P 的坐标为(3，-3)，故选 B.

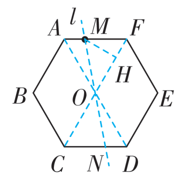
4. $3\sqrt{3}$ 【解析】如图，当点 P 是正六边形的中心时，连接 PB，PC，过点 P 作 $PH\perp BC$ 于点 H，延长 HP 交 EF 于点 G，则点 P 到这



个正六边形六条边的距离之和为 $6PH$ 的值. 根据正六边形的性质可知 $\triangle BPC$ 是等边三角形，$\therefore \angle BPC=60°$. $\because PH\perp BC$，$\therefore \angle BPH=30°$，$BH=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}$ cm，$\therefore PH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm，

∴ $6PH=3\sqrt{3}$ cm，∴ 点 P 到这个正六边形六条边的距离之和为 $3\sqrt{3}$ cm. 故答案为 $3\sqrt{3}$.

5. $4\sqrt{7}$ 【解析】如图，连接 AD，CF 交于点 O，则 O 为该正六边形的中心，则直线 MO 即为符合条件的直线 l. 令直线 l 交 CD 于点 N，过点 M 作 $MH\perp OF$ 于点 H. ∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，$AB=6$，中心为 O，∴ $AF=AB=6$，$\angle AFO=\frac{1}{2}\angle AFE=\frac{1}{2}\times\frac{(6-2)\times180^\circ}{6}=60^\circ$，$MO=ON$. 又∵ $OA=OF$，∴ $\triangle OAF$ 是等边三角形，∴ $OA=OF=AF=6$. ∵ $AM=2$，∴ $MF=AF-AM=6-2=4$. ∵ $MH\perp OF$，∴ $\angle FMH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，∴ $FH=\frac{1}{2}MF=\frac{1}{2}\times4=2$，∴ $MH=\sqrt{MF^2-FH^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$OH=OF-FH=6-2=4$，∴ $OM=\sqrt{MH^2+OH^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$，∴ $NO=OM=2\sqrt{7}$，∴ $MN=NO+OM=2\sqrt{7}+2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.



▶**归纳总结**

经过正六边形 $ABCDEF$ 中心的直线可以将正六边形的面积平分.

6. (1)【证明】∵ 正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，⊙O 的半径为 4 cm，∴ $AB=BC=CD=DE=EF=FA=4$ cm，$\angle A=\angle ABC=\angle C=\angle D=\angle DEF=\angle F$. ∵ 点 P，Q 同时分别从 A，D 两点出发，以 1 cm/s 的速度沿 AF，DC 向终点 F，C 运动，∴ $AP=DQ=t$ cm，$PF=QC=(4-t)$ cm.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle DEQ$ 中，∵ $\begin{cases}AB=DE,\\ \angle A=\angle D,\\ AP=DQ,\end{cases}$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle DEQ$(SAS)，∴ $BP=EQ$. 同理可证 $PE=QB$，∴ 四边形 $PBQE$ 是平行四边形.

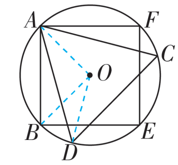
(2)①2　②0 或 4　【解析】①由对称性可知，当 $PA=PF$，$QC=QD$ 时，四边形 $PBQE$ 是菱形，此时 $t=2$. ②当 $t=0$ 时，点 P 在点 A 处，$\angle EPF=\angle PEF=30^\circ$，∴ $\angle BPE=120^\circ-30^\circ=90^\circ$，∴ 此时四边形 $PBQE$ 是矩形. 当 $t=4$ 时，点 P 在点 F 处，同理可得 $\angle BPE=90^\circ$，此时四边形 $PBQE$ 是矩形. 综上所述，当 $t=0$ 或 4 时，四边形 $PBQE$ 是矩形.

▶**技巧点拨**

(2)①当四边形 $PBQE$ 为菱形时，可知 $PB=PE=EQ=BQ$，结合对称性可得 $AP=PF$，$QC=QD$；②当四边形 $PBQE$ 为矩形时，只需找到使 $\angle BPE=90^\circ$ 时点 P 的位置即可.

刷素养

7. 十二　正 $n(n+1)$　【解析】如图，连接 OA，OB，OD. ∵ 正三角形 ADC 和正方形 $ABEF$ 内接于同一个圆 O，∴ $\angle AOD=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$，$\angle AOB=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$，∴ $\angle BOD=\angle AOD-\angle AOB=30^\circ$. ∵ $\frac{360^\circ}{30^\circ}=12$，∴ BD 可以看做是正十二边形的边. 若正 n 边形和正 $(n+1)$ 边形内接于同一个圆 O，同理可得 $\angle AOD=\frac{360^\circ}{n}$，$\angle AOB=\frac{360^\circ}{n+1}$，∴ $\angle BOD=\angle AOD-\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}-\frac{360^\circ}{n+1}=\frac{360^\circ}{n(n+1)}$，∴ $\frac{360^\circ}{\frac{360^\circ}{n(n+1)}}=n(n+1)$，∴ BD 可以看做是正 $n(n+1)$ 边形的边. 故答案为十二，正 $n(n+1)$.



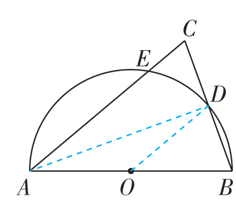
9　弧长及扇形的面积

刷基础

1. B　【解析】题图中的管道中心线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{120\pi\times40}{180}=\frac{80\pi}{3}$ (m)，故选 B.

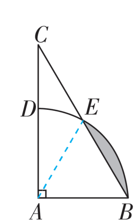
2. C　【解析】设滑轮旋转的角度为 n°. 根据题意得 $\frac{n\pi\times10}{180}=15\pi$，∴ $n=270$，∴ 滑轮旋转的角度为 270°. 故选 C.

3. D　【解析】连接 AD，OD，如图所示. ∵ AB 为半圆的直径，∴ $\angle ADB=90^\circ$. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle CAD=\angle BAD$，∴ $\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{BD}$. ∵ $\angle C=70^\circ$，∴ $\angle ABC=\angle C=70^\circ$. ∵ $OD=OB$，∴ $\angle ODB=\angle ABC=70^\circ$，∴ $\angle BOD=180^\circ-2\times70^\circ=40^\circ$. ∵ $AB=6$，∴ $OB=3$，∴ $\overset{\frown}{BD}$ 的长为 $\frac{40\pi\times3}{180}=\frac{2}{3}\pi$，∴ $\overset{\frown}{DE}$ 的长为 $\frac{2}{3}\pi$，故选 D.



4. $\frac{\pi}{2}$　【解析】∵ $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 $\frac{5}{6}\pi$ 米，$\angle COD=60^\circ$，∴ $\frac{60\pi\cdot OA}{180}=\frac{5\pi}{6}$，∴ $OA=\frac{5}{2}$ 米. ∵ $AD=1$ 米，∴ $OD=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$(米)，∴ $\overset{\frown}{CD}$ 的长度为 $\frac{60\pi\times\frac{3}{2}}{180}=\frac{\pi}{2}$(米)，故答案为 $\frac{\pi}{2}$.

5. $3+\pi$　【解析】如图，连接 AE. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，∵ $\angle BAC=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AB=3$，∴ $\angle ABC=60^\circ$. ∵ $AB=AE$，∴ $\triangle ABE$ 是等边三角形，∴ $\angle BAE=60^\circ$，$BE=AB=3$，



∴ 弧 BE 的长度为 $\frac{60\pi\times3}{180}=\pi$，∴ 图中阴影部分的周长是 $3+\pi$. 故答案为 $3+\pi$.

关键点拨 连接 AE，可知 $\triangle ABE$ 为等边三角形，利用弧长公式即可求解.

6. B 【解析】由题知，$S_{扇形OAD}=\frac{120\cdot\pi\cdot5^2}{360}=\frac{25}{3}\pi$，$S_{扇形OBC}=\frac{120\cdot\pi\cdot2^2}{360}=\frac{4}{3}\pi$，所以 $S_{阴影部分}=S_{扇形OAD}-S_{扇形OBC}=\frac{25}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi=7\pi$. 故选 B.

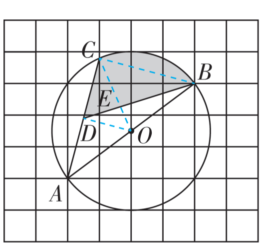
7. $\frac{77}{12}\pi$ 【解析】大扇形的圆心角是 90 度，半径是 5 m，所以面积为 $\frac{90\pi\times25}{360}=\frac{25}{4}\pi(\text{m}^2)$；小扇形的圆心角是 $180°-120°=60°$，半径是 $5-4=1(\text{m})$，所以面积为 $\frac{60\pi\times1}{360}=\frac{\pi}{6}(\text{m}^2)$. 则小羊 A 在草地上的最大活动区域面积是 $\frac{25}{4}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{77}{12}\pi(\text{m}^2)$. 故答案为 $\frac{77}{12}\pi$.

关键点拨 解题的关键是确定小羊 A 的最大活动区域为两个扇形.

8. $\frac{4\pi}{9}$ 【解析】∵ $\angle BAC=60°$，$\angle ABC=100°$，∴ $\angle ACB=20°$. 又∵ E 为 BC 的中点，∴ $BE=EC=\frac{1}{2}BC=2$. ∵ $BE=EF$，∴ $EF=EC=2$，∴ $\angle EFC=\angle ACB=20°$，∴ $\angle BEF=40°$，∴ 扇形 BEF 的面积为 $\frac{40\pi\times2^2}{360}=\frac{4\pi}{9}$.

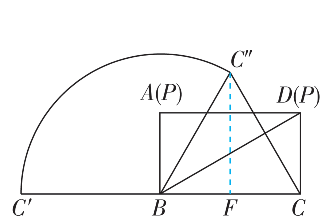
刷提升

1. B 【解析】如图，连接 OD,CB,CO. 由题意可得 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$. ∵ $\angle A=\alpha$，∴ $\angle COB=2\alpha$. ∵ 点 D 是 AC 的中点，∴ $OD\perp AC$，$AD=CD$. ∵ AB 为直径，∴ $BC\perp AC$，∴ $OD\parallel BC$，∴ $S_{\triangle DCB}=S_{\triangle OBC}$，∴ $S_{阴影}=S_{扇形OBC}=\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{2\alpha}{360}=\frac{25\alpha\pi}{720}$，故选 B.

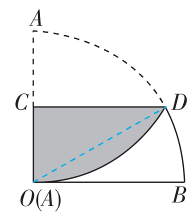


2. B 【解析】如图，当 P 与 A 重合时，点 C 关于 BP 的对称点为 C'，当 P 与 D 重合时，点 C 关于 BP 的对称点为 C''，∴ 点 P 从点 A 运动到点 D，线段 CC_1 扫过的区域为扇形 $BC'C''$ 和 $\triangle BCC''$. 在 $\triangle BCD$ 中，∵ $\angle BCD=90°$，$BC=\sqrt{3}$，$CD=1$，∴ $\tan\angle DBC=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\angle DBC=30°$，∴ $\angle CBC''=60°$，∴ $\angle C'BC''=120°$. ∵ $BC=BC''=BC'=\sqrt{3}$，∴ $\triangle BCC''$ 为等边三角形，$S_{扇形BC'C''}=\frac{120\times\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}=\pi$. 过点 C'' 作 $C''F\perp BC$ 于 F. ∵ $\triangle BCC''$ 为等边三角形，∴ $BF=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $C''F=\tan60°\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，∴ $S_{\triangle BCC''}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，∴ 线段 CC_1 扫过的区域的面积为 $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 B.

关键点拨 将不规则图形的面积转化为规则图形的面积是解题关键.



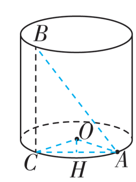
（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. $\frac{50\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图，连接 OD. 由题意得 $S_{阴影部分}=S_{区域ACD}$. 在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中，∵ $OC=\frac{1}{2}OD=5$，∴ $\angle ODC=30°$，$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=5\sqrt{3}$，∴ $\angle COD=60°$，∴ 阴影部分的面积为 $\frac{60\pi\times10^2}{360}-\frac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\frac{50\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$. 故答案为 $\frac{50\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

4. $40\sqrt{3}$ 【解析】如图，连接 AB，OC,OA,AC，作 $OH\perp AC$ 于 H. 设 $\angle AOC=n°$. ∵ $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 $\frac{40\pi}{3}$ cm，∴ $\frac{n\pi\cdot20}{180}=\frac{40\pi}{3}$，∴ $n=120$.



∵ $OA=OC$，$OH\perp AC$，∴ $\angle COH=\angle AOH=60°$，$CH=AH$，∴ $AC=2CH=2\cdot OC\cdot\sin60°=2\times20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}(\text{cm})$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{60^2+(20\sqrt{3})^2}=40\sqrt{3}(\text{cm})$，∴ 该飞虫从点 A 到达点 B 的最短路径长为 $40\sqrt{3}$ cm. 故答案为 $40\sqrt{3}$.

刷素养

5. 【解】(1) ∵ $MN=4$，∴ 半圆 P 的半径为 2. ∵ 半圆 P 与数轴相切于原点 O，∴ 位置Ⅰ中

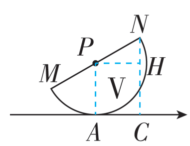
的 MN 与数轴之间的距离为 2. ∵ 位置Ⅱ中的 MN 垂直于数轴,∴ 位置Ⅱ中的半圆 P 与数轴的位置关系是相切. 故答案为 2,相切.

(2)位置Ⅰ中 $\overset{\frown}{ON}$ 的长与数轴上线段 ON 的长相等. ∵ $\overset{\frown}{ON}$ 的长为 $\frac{90\pi \cdot 2}{180}=\pi$,位置Ⅱ中 $NP=2$,∴ 位置Ⅲ中的圆心 P 在数轴上表示的数为 $\pi+2$.

关键点拨 (2)在解答此题时要注意位置Ⅰ中 $\overset{\frown}{ON}$ 的长与数轴上线段 ON 的长相等.

(3)由弧长公式可得,点 N 所经过的路径长为 $\frac{90\pi \cdot 4}{180}=2\pi$. ∵ $S_{半圆}=\frac{1}{2}\pi\times 2^2=2\pi$, $S_{扇形}=\frac{90\pi \cdot 4^2}{360}=4\pi$,∴ 该纸片所扫过的图形的面积为 $2\pi+4\pi=6\pi$.

(4)如图,作 NC 垂直数轴于点 C,作 $PH \perp NC$ 于点 H,连接 PA,则四边形 $PHCA$ 为矩形. 在 Rt△NPH 中, $PN=2$, $NH=NC-HC=NC-PA=1$,∴ $\sin\angle NPH=\frac{NH}{PN}=\frac{1}{2}$,∴ $\angle NPH=30°$,∴ $\angle MPA=60°$,∴ $\overset{\frown}{MA}$ 的长为 $\frac{60\pi \cdot 2}{180}=\frac{2\pi}{3}$,∴ OA 的长为 $\pi+4+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi+4$.



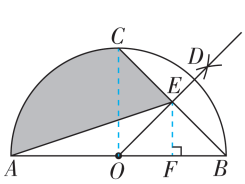
大招专题 7 不规则图形面积的求法

刷难关

大招解读|和差法
将不规则图形转化成若干个基本图形(有时需要添加辅助线),然后将面积进行相加、相减求解.

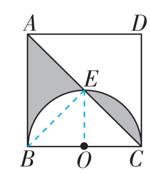
1. D 【解析】根据题意知 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$,则 $BE=BF=AD=AC=1$. 设 $\angle B=n°$, $\angle A=m°$. ∵ $\angle ACB=90°$,∴ $\angle B+\angle A=90°$,即 $n+m=90$,∴ $S_{阴影部分}=S_{\triangle ABC}-(S_{扇形EBF}+S_{扇形DAC})=\frac{1}{2}\times 2\times 1-\left(\frac{n\pi\times 1^2}{360}+\frac{m\pi\times 1^2}{360}\right)=1-\frac{(n+m)\pi}{360}=1-\frac{\pi}{4}$,故选 D.

2. A 【解析】连接 OC,如图. ∵ 点 C 是直径 AB 为 4 的半圆 O 的中点,∴ $OC \perp AB$,即 $\angle COA=\angle COB=90°$,∴ $BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=2\sqrt{2}$. ∵ $OC=OB$,∴ $\angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}(180°-90°)=45°$. 由作图知 $OD \perp BC$,∴ △OEC,△BEO 均为等腰直角三角形,且 $OE=CE=BE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$. 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F,则△EFB 是等腰直角三角形,∴ $EF=BF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$,∴ $S_{阴影}=S_{扇形AOC}+S_{\triangle OEC}-S_{\triangle AOE}=\frac{90\cdot\pi\cdot 2^2}{360}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times 2\times 1=\pi+1-1=\pi$. 故选 A.



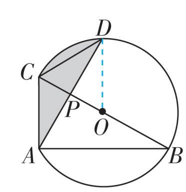
大招解读|等积转化法
适用情形:①图中某些空白部分可通过对称、旋转等使之和部分阴影面积相等,进而将阴影部分转化为规则图形;②利用全等的三角形、同底等高的三角形面积相等转化.

3. A 【解析】如图,设 AC 与半圆交于点 E,半圆的圆心为 O,连接 BE, OE. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle OCE=45°$. ∵ $OE=OC$,∴ $\angle OEC=\angle OCE=45°$,∴ $\angle EOC=90°$,∴ OE 垂直平分 BC,∴ $BE=CE$,∴ 弓形 BE 的面积 = 弓形 CE 的面积,∴ $S_{阴影部分}=S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times 6\times 6-\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$,故选 A.



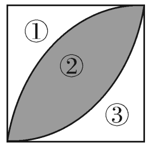
关键点拨 全等的两个三角形的面积相等.

4. $\frac{2}{3}\pi$ 【解析】∵ Rt△ABC 内接于 $\overset{\frown}{ABC}$,$\angle BAC=90°$,∴ BC 是直径. 设 BC 的中点为 O. 如图,连接 OD. ∵ $\angle BAC=90°$, $\angle ABC=30°$, $AC=2$,∴ $AC=\frac{1}{2}BC=CO=2$. ∵ $CD=CA$,∴ $CD=CO$. ∵ $CO=DO$,∴ $AC=DO$,△COD 是等边三角形,∴ $\angle COD=\angle CDO=60°$. P 是线段 BC 上的动点,当点 A,P,D 共线时,$PA+PD$ 的值最小,此时 $\angle CAD=\angle CDA=30°$,∴ $\angle ADO=30°$. 在△APC 和△DPO 中,
$$\begin{cases}\angle CAP=\angle PDO,\\ \angle APC=\angle DPO,\\ AC=OD,\end{cases}$$
∴ △APC≌△DPO(AAS),∴ $S_{阴影}=S_{扇形COD}=\frac{60\pi\times 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$,故答案为 $\frac{2}{3}\pi$.



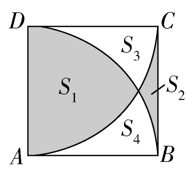
大招解读 | 容斥原理法

这类题阴影部分一般是由几个图形叠加而成，求解时把所求阴影部分的面积问题转化为可求面积的规则图形的重叠部分的面积问题，然后运用“容斥原理”解决. 如图，求阴影部分的面积：$S_{①}+S_{②}+S_{②}+S_{③}=\frac{1}{2}S_{圆}$，$S_{①}+S_{②}+S_{③}=S_{正方形}$，$S_{阴影}=S_{②}=\frac{1}{2}S_{圆}-S_{正方形}$.



5. B 【解析】由题意可得 $S_{阴影}=2S_{扇形ABC}-S_{正方形ABCD}=2\times\frac{90\pi\cdot a^2}{360}-a^2=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$，故选 B.

6. A 【解析】如图. $S_{正方形}=S_1+S_2+S_3+S_4$，① 两个扇形的面积和为 $2S_{扇形}=2S_1+S_3+S_4$，② ②−①，得 $S_1-S_2=2S_{扇形}-S_{正方形}=\frac{90\pi\times1^2\times2}{360}-1=\frac{\pi}{2}-1$. 故选 A.

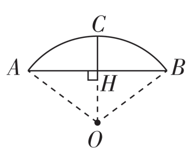


全章综合训练

刷中考

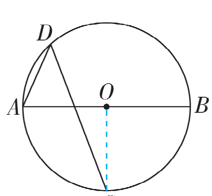
1. A 【解析】∵ $OC\perp AB$，$AB=8$，∴ $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$. 又∵ $OA=OC=5$，∴ 在 Rt△OAD 中，$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，故选 A.

2. $\frac{4}{5}$ 【解析】如图，作 $OH\perp AB$ 交 AB 于 H，交圆弧于 C. 由题意得，$AB=8$，$HC=2$，设 $OA=OC=x$，∴ $OH=x-2$. ∵ $OH\perp AB$，OC 为半径，∴ $AH=BH=\frac{1}{2}AB=4$，在 Rt△OAH 中，由勾股定理得 $AH^2+OH^2=OA^2$，∴ $4^2+(x-2)^2=x^2$，解得 $x=5$，∴ $OA=5$，∴ $\cos\angle OAB=\frac{AH}{OA}=\frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{4}{5}$.

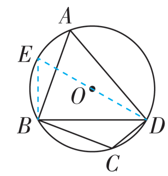


3. B 【解析】∵ $\angle AOB=100°$，∴ $\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times100°=50°$. 故选 B.

4. B 【解析】如图，连接 OC. ∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，∴ $\angle AOC=\angle BOC$. ∵ AB 为直径，∴ $\angle AOC+\angle BOC=180°$，∴ $\angle AOC=90°$，∴ $\angle D=\frac{1}{2}\angle AOC=45°$. 故选 B.



5. $6\sqrt{3}$ 【解析】如图，作直径 DE，连接 BE，则 $\angle A=\angle E$，$\angle EBD=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，∴ $\angle A+\angle BCD=180°$. ∵ $\angle BCD=120°$，∴ $\angle A=60°$，∴ $\angle E=60°$. ∵ ⊙O 的半径为 6，∴ $DE=12$，∴ $BD=DE\cdot\sin E=12\times\sin60°=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. 故答案为 $6\sqrt{3}$.



6. 【解】(1) ∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $\angle ADB=\angle ACB=90°$. 又∵ $\angle ABC=25°$，∴ $\angle CAB=90°-25°=65°$. ∵ 四边形 $ABEC$ 是⊙O 的内接四边形，∴ $\angle CEB+\angle CAB=180°$，∴ $\angle CEB=180°-\angle CAB=115°$.

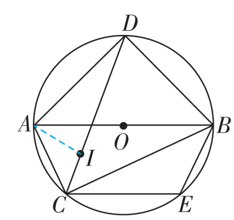
(2) $DI=AD=BD$. 证明如下：

连接 AI，如图(1).

∵ 点 I 为△ABC 的内心，

∴ $\angle CAI=\angle BAI$，$\angle ACI=\angle BCI=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，



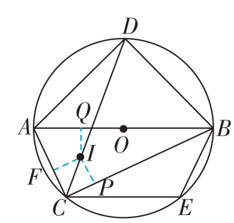
图(1)

∴ $\angle DAB=\angle DCB=\angle ACI$，$AD=BD$.

∵ $\angle DAI=\angle DAB+\angle BAI$，$\angle DIA=\angle ACI+\angle CAI$，∴ $\angle DAI=\angle DIA$，∴ $DI=AD=BD$.

(3) 过 I 分别作 $IQ\perp AB$，$IF\perp AC$，$IP\perp BC$，垂足分别为 Q，F，P，如图(2).

∵ 点 I 为△ABC 的内心，即为△ABC 的内切圆的圆心，∴ Q，F，P 分别为该内切圆与△ABC 三边的切点，∴ $AQ=AF$，$CF=CP$，$BQ=BP$. ∵ $CI=2\sqrt{2}$，$\angle IFC=90°$，$\angle ACI=45°$，∴ $CF=CI\cdot\cos45°=2$. ∵ $DI=AD=BD=\frac{13}{2}\sqrt{2}$，$\angle ADB=90°$，∴ $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=13$，∴ △ABC 的周长为 $AB+AC+BC=AB+AF+CF+CP+BP=AB+AQ+BQ+2CF=2AB+2CF=2\times13+2\times2=30$.



图(2)

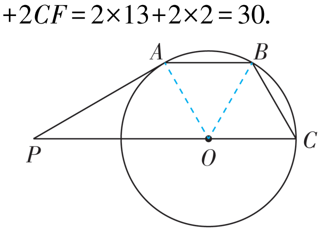
思路分析

(1) 利用圆周角定理的推论得到 $\angle ACB=90°$，再根据三角形的内角和定理求出 $\angle CAB=65°$，然后利用圆内接四边形的对角互补求解即可；

(2) 连接 AI，先由三角形的内心性质得到 $\angle CAI=\angle BAI$，$\angle ACI=\angle BCI$，然后得到 $\angle DAB=\angle DCB=\angle ACI$，$AD=BD$，再利用等角代换得 $\angle DAI=\angle DIA$，最后利用等角对等边可得结论；

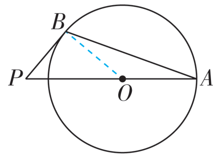
(3) 过 I 分别作 $IQ\perp AB$，$IF\perp AC$，$IP\perp BC$，垂足分别为 Q，F，P. 根据内切圆的性质和切线长定理得到 $AQ=AF$，$CF=CP$，$BQ=BP$，再根据解直角三角形求得 $CF=2=CP$，由勾股定理求得 $AB=13$，进而可求解.

7. C 【解析】连接 OA，OB，如图所示. ∵ PA 是⊙O 的切线，∴ $\angle OAP=90°$. ∵ $\angle P=30°$，∴ $\angle AOP=90°-30°=60°$. ∵ $AB\parallel PC$，∴ $\angle OAB=\angle AOP=60°$. ∵ $OA=OB$，∴ △AOB 是等边三角形，∴ $\angle AOB=60°$，∴ $\angle BOC=$



60°. ∵ $OC=OB$, ∴ $\triangle COB$ 是等边三角形, ∴ $\angle BCP=60°$. 故选 C.

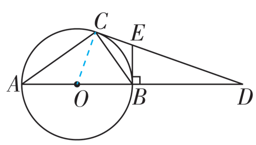
8. 20 【解析】如图,连接 OB. ∵ PB 为⊙O 切线, ∴ $\angle OBP=90°$. 又∵ $\angle P=50°$, ∴ $\angle BOP=40°$, ∴ $\angle A=20°$. 故答案为 20.



9. (1)【解】∵ BC 与⊙O 相切于点 C, ∴ $OC\perp CB$, ∴ $\angle OCB=90°$, ∴ $\angle ACO=\angle ACB-\angle OCB=120°-90°=30°$.

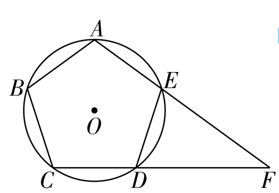
(2)【证明】∵ $OA=OC$, ∴ $\angle A=\angle ACO=30°$, ∴ $\angle B=180°-\angle A-\angle ACB=180°-120°-30°=30°$, ∴ $\angle A=\angle B$, ∴ $AC=BC$.

10. (1)【证明】如图,连接 OC. ∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ACB=90°$, ∴ $\angle A+\angle ABC=90°$. ∵ $OB=OC$, ∴ $\angle ABC=\angle OCB$. ∵ $\angle BCD=\angle A$, ∴ $\angle BCD+\angle OCB=90°$, 即 $\angle OCD=90°$, ∴ $OC\perp CD$. ∵ OC 为⊙O 的半径, ∴ CD 是⊙O 的切线.



(2)【解】∵ 点 B 是 AD 的中点, ∴ $BD=AB=2OC$. ∵ $OB=OC$, ∴ $OD=OB+BD=3OC$, ∴ $\frac{OC}{OD}=\frac{1}{3}$. ∵ $BE\perp AD$, ∴ $\angle DBE=90°$. 又∵ $\angle OCD=90°$, ∴ $\sin D=\frac{BE}{DE}=\frac{OC}{OD}=\frac{1}{3}$, ∴ $DE=3BE=9$, 在 Rt$\triangle DBE$ 中, $BD=\sqrt{DE^2-BE^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$, ∴ $OC=3\sqrt{2}$, 即⊙O 的半径为 $3\sqrt{2}$.

11. 36 或 108 【解析】如图,当角的顶点 B 在⊙O 上时,⊙O 交 $\angle ABC$ 的两边,截得 AB, BC.



∵ $\angle ABC$ 恰好是正五边形的一个内角, ∴ $\angle ABC=\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$. 当角的顶点 F 在⊙O 外部时,⊙O 交 $\angle AFC$ 的两边,截得 AE, CD, 则 $\angle AED=\angle CDE=\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$, ∴ $\angle FED=\angle FDE=180°-108°=72°$, ∴ $\angle F=180°-2\times72°=36°$. 综上,这个角的度数为 36°或 108°. 故答案为 36 或 108.

▶思路分析

分角的顶点在圆上和圆外两种情况求解即可.

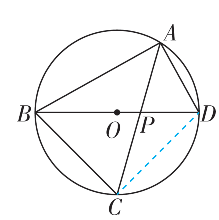
12. C 【解析】由题意得 $\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC=25°$, ∴ 点 A 和点 B 之间的劣弧长约为 $\frac{25\pi\times R}{180}=\frac{5}{36}\pi R$(千米). 故选 C.

13. D 【解析】∵ $\angle BAC=90°$, $AB=AC$, $BC=4$, ∴ $\angle ABC=\angle ACB=45°$, ∴ $AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=2\sqrt{2}$, ∴ $S_{阴影部分}=S_{扇形BCE}+S_{扇形DBC}-2S_{\triangle ABC}=\frac{45\pi\times4^2}{360}+\frac{45\pi\times4^2}{360}-2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4\pi-8$. 故选 D.

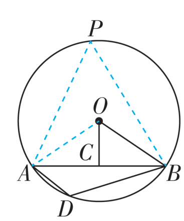
14. 40π 【解析】∵ 最高点离水面平台 MN 的距离为 128 m,圆心 O 到 MN 的距离为 68 m, ∴ ⊙O 的半径为 $128-68=60$(m). ∵ 摩天轮匀速旋转一圈用时 30 min,该轿厢从点 A 出发,10 min 后到达点 B, ∴ $\angle AOB=\frac{10}{30}\times360°=120°$, ∴ 该轿厢所经过的路径长度为 $\frac{120\pi\times60}{180}=40\pi$(m). 故答案为 40π.

刷章测

1. A 【解析】连接 CD,如图. ∵ BD 是⊙O 的直径, ∴ $\angle BCD=\angle BAD=90°$. ∵ 点 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点, ∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$, ∴ $BC=CD$, ∴ $\angle CBD=45°$, ∴ $\angle CAD=45°$. ∵ $\angle CPD$ 是 $\triangle ADP$ 的外角, ∴ $\angle CPD=\angle CAD+\angle ADB=45°+61°=106°$. 故选 A.



(第 1 题图)



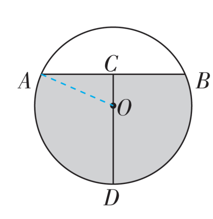
(第 2 题图)

2. B 【解析】作劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角 $\angle APB$, 连接 OA,如图. ∵ 四边形 $ADBP$ 是⊙O 的内接四边形, ∴ $\angle P+\angle ADB=180°$. ∵ $\angle ADB=124°$, ∴ $\angle P=56°$, ∴ $\angle AOB=2\angle P=112°$. ∵ C 为 AB 的中点, $OA=OB$, ∴ OC 平分 $\angle AOB$, ∴ $\angle COB=\frac{1}{2}\angle AOB=56°$, 故选 B.

关键点拨◀

熟练掌握垂径定理和勾股定理是解题的关键.

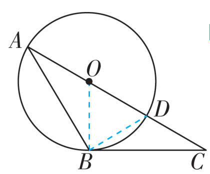
3. C 【解析】连接 OA,如图. 由题意得 $OC\perp AB$, ∴ $AC=BC$, $\angle OCA=90°$. ∵ $CD=7$ cm, $OA=OD=5$ cm, ∴ $OC=CD-OD=2$ cm,



$\therefore AC=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ (cm), $\therefore AB=2AC=2\sqrt{21}$ cm, $\therefore$ 截面圆中弦 AB 的长为 $2\sqrt{21}$ cm. 故选 C.

4. B 【解析】连接 OA. $\because OA=OB, OA=OD$, $\therefore \angle OBA=\angle BAO, \angle ODA=\angle DAO$, $\therefore \angle OBA+\angle ODA=\angle BAO+\angle DAO=\angle BAD$. $\because$ 四边形 $OBCD$ 是菱形, $\therefore \angle BCD=\angle BOD$. 由圆周角定理得, $\angle BOD=2\angle BAD$, $\therefore \angle BCD=2\angle BAD$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\therefore \angle BAD+\angle BCD=180°$, $\therefore 3\angle BAD=180°$, $\therefore \angle BAD=60°$, $\therefore \angle OBA+\angle ODA=\angle BAD=60°$. 故选 B.

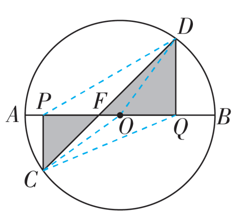
5. C 【解析】如图, 连接 OB, DB, 则 $OB=OD=2$. $\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ABD=90°$, $AD=2OD=4$. $\because BC$ 与 $\odot O$ 相切于点 B, $\therefore BC\perp OB$, $\therefore \angle OBC=90°$. $\because \angle C=30°$, $\therefore \angle BOC=60°$, $\therefore \triangle BOD$ 是等边三角形, $\therefore BD=OD=2$, $\therefore AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$, 故选 C.



思路分析

连接 OB, DB. 由 AD 是 $\odot O$ 的直径得 $\angle ABD=90°$, $AD=2OD=4$, 由切线的性质得 $\angle OBC=90°$, 则 $\angle BOC=60°$, 所以 $\triangle BOD$ 是等边三角形, 则 $BD=OD=2$, 所以 $AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=2\sqrt{3}$.

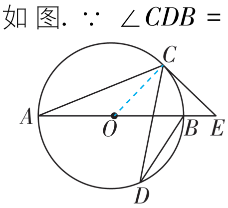
6. B 【解析】如图, 连接 OC, OD, PD, CQ. 设 $PC=x, OP=y, OF=a$. $\because PC\perp AB, QD\perp AB$, $\therefore \angle CPO=\angle OQD=90°$. $\because PC=OQ, OC=OD$, $\therefore \text{Rt}\triangle OPC\cong\text{Rt}\triangle DQO$, $\therefore OP=DQ=y$, $\therefore S_{阴影}=S_{四边形PCQD}-S_{\triangle PFD}-S_{\triangle CFQ}=\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(y-a)y-\frac{1}{2}(x+a)x=xy+\frac{1}{2}a(y-x)$. $\because PC\perp AB, QD\perp AB$, $\therefore PC/\!/DQ$, $\therefore \triangle PCF\backsim\triangle QDF$, $\therefore \frac{PC}{DQ}=\frac{PF}{FQ}$, $\therefore \frac{x}{y}=\frac{y-a}{a+x}$, $\therefore a=y-x$, $\therefore S_{阴影}=xy+\frac{1}{2}(y-x)(y-x)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}OC^2=\frac{25}{2}$. 故在整个运动过程中, $\triangle CFP$ 与 $\triangle DFQ$ 的面积和一直不变. 故选 B.



关键点拨

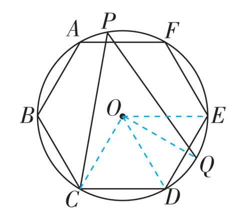
本题的解题关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 并学会用分割法求面积.

7. 46° 【解析】连接 OC, 如图. $\because \angle CDB=\frac{1}{2}\angle COE$, $\angle CDB=22°$, $\therefore \angle COE=44°$. $\because CE$ 切 $\odot O$ 于点 C, $\therefore OC\perp CE$, $\therefore \angle OCE=90°$, $\therefore \angle E=90°-\angle COE=46°$. 故答案为 46°.

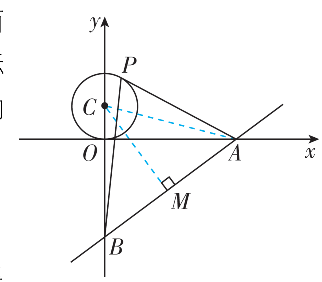


8. $\frac{7}{18}\pi$ 【解析】由作图知 OP 平分 $\angle AOB$, $\therefore \angle AOB=2\angle BOP=2\times35°=70°$. $\because$ 扇形的半径是 1, $\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{70\pi\times1}{180}=\frac{7}{18}\pi$. 故答案为 $\frac{7}{18}\pi$.

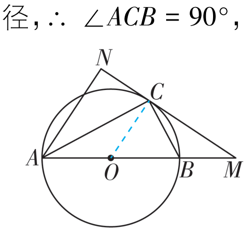
9. 45° 【解析】如图, 连接 OC, OD, OQ, OE. $\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形, Q 是 $\overset{\frown}{DE}$ 的中点, $\therefore \angle COD=\angle DOE=\frac{360°}{6}=60°$, $\angle DOQ=\angle EOQ=\frac{1}{2}\angle DOE=30°$, $\therefore \angle COQ=\angle COD+\angle DOQ=90°$, $\therefore \angle CPQ=\frac{1}{2}\angle COQ=45°$, 故答案为 45°.



10. 10.5 【解析】$\because$ 直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A, B 两点, $\therefore A$ 点的坐标为 $(4,0)$, B 点的坐标为 $(0,-3)$, $\therefore OA=4, OB=3$. 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=5$. 如图, 过点 C 作 $CM\perp AB$ 于 M, 连接 AC, 则 $S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\times AB\times CM=\frac{1}{2}\times OA\times OC+\frac{1}{2}\times OA\times OB$, $\therefore 5\times CM=4\times1+3\times4$, $\therefore CM=\frac{16}{5}$, $\therefore$ 圆 C 上的点到直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 的最大距离是 $1+\frac{16}{5}=\frac{21}{5}$, $\therefore \triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}\times5\times\frac{21}{5}=10.5$, 故答案为 10.5.



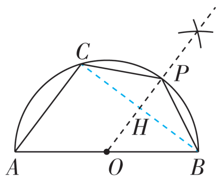
11. $\frac{24}{5}$ 【解析】连接 OC, 如图. $\because CM$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OCM=90°$, $\therefore \angle OCB+\angle MCB=90°$. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB=90°$, $\therefore \angle ACO+\angle BCO=90°$, $\therefore \angle ACO=\angle BCM$. $\because OC=OA$, $\therefore \angle ACO=\angle CAO$, $\therefore \angle CAO=\angle BCM$. $\because \angle M=\angle M$, $\therefore \triangle ACM\backsim\triangle CBM$, $\therefore \frac{CM}{AM}=\frac{BM}{CM}$, $\therefore \frac{4}{AM}=\frac{2}{4}$, $\therefore AM=8$, $\therefore AB=AM-BM=6$, $\therefore AO=OB=OC=3$. $\because AN\perp MN$, $\therefore OC/\!/AN$, $\therefore \triangle CMO\backsim$



$\triangle NMA$,∴ $\frac{OC}{AN}=\frac{OM}{AM}$,∴ $\frac{3}{AN}=\frac{5}{8}$,∴ $AN=\frac{24}{5}$,故答案为$\frac{24}{5}$.

关键点拨 熟练掌握切线的性质,相似三角形的判定和性质是解题的关键.

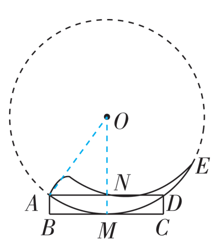
12.【解】(1)如图,点 P 即为所求.



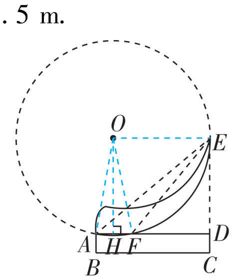
(2)如图,连接 BC 交 OP 于 H. ∵ AB 是直径,∴ $\angle ACB=90°$,∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. ∵ $OP\perp BC$,∴ $CH=BH$. ∵ $OA=OB$,∴ OH 是 $\triangle ABC$ 的中位线,∴ $OH=\frac{1}{2}AC=3$. ∵ $OP=\frac{1}{2}AB=5$,∴ $PH=OP-OH=5-3=2$,∴ 四边形 $ABPC$ 的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot BC+\frac{1}{2}BC\cdot PH=\frac{1}{2}\times6\times8+\frac{1}{2}\times8\times2=32$.

思路分析 (2)连接 BC 交 OP 于 H,根据勾股定理求出 BC 的长,然后根据中位线定理求出 OH 的长,进而求出 PH 的长,即可求出四边形 $ABPC$ 的面积.

13.【解】(1)如图(1),连接 OM 交 AD 于点 N,则 $OM\perp BC$,∴ $OM\perp AD$,$MN=0.3$ m,∴ $AN=DN=0.9$ m. 连接 OA,设⊙O 的半径为 r m,则 $ON=(r-0.3)$ m. 由勾股定理,得 $ON^2+AN^2=OA^2$,∴ $(r-0.3)^2+0.9^2=r^2$,解得 $r=1.5$. 故⊙O 的半径为 1.5 m.



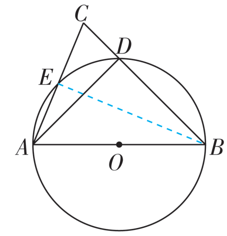
图(1)



图(2)

(2)如图(2),连接 OE,则 $OE\perp ED$,$OE=1.5$ m. 过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H. 又∵ $\angle EDH=90°$,∴ 四边形 $OHDE$ 是矩形,∴ $HD=OE=1.5$ m,∴ $AH=1.8-1.5=0.3$(m). 连接 OA,OF,则 $OA=OF=1.5$ m,∴ $\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOF$. 又∵ $\angle AEF=\frac{1}{2}\angle AOF$,∴ $\angle AEF=\angle AOH$,∴ $\sin\angle AEF=\sin\angle AOH=\frac{AH}{OA}=\frac{0.3}{1.5}=\frac{1}{5}$.

14.【解】(1)如图(1),连接 BE. ∵ AB 为直径,∴ $BE\perp AC$,$AD\perp BC$. ∵ 点 E 是 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点,∴ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DE}$,∴ $\angle ABE=\angle CBE$. ∵ $\angle AEB=\angle BEC=90°$,$BE=BE$,∴ $\triangle ABE\cong\triangle CBE$(ASA),∴ $AE=CE=6.5$,∴ $AC=13$. ∵ $CD=5$,∴ $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=12$.



图(1)

(2)存在. ∵ $\angle BCM=105°$,$\angle BAN=135°$,∴ $\angle ACB=75°$,$\angle CAB=45°$,∴ $\angle B=180°-\angle ACB-\angle CAB=60°$,∴ $\angle DEF=2\angle B=120°$. 过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H,如图(2),

∴ $\angle CHB=\angle CHA=90°$,

∴ $\angle BCH=90°-\angle B=30°$,$\angle ACH=90°-\angle CAH=45°$,

∴ $BH=\frac{1}{2}BC=400$ m,∴ $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=400\sqrt{3}$ m,∴ $CH=AH=400\sqrt{3}$ m,

∴ $AB=BH+AH=(400+400\sqrt{3})$ m. ∵ $ED\perp AB$,∴ $\angle BDE=90°$,

∴ $\angle BFE=360°-120°-60°-90°=90°$,∴ B,F,E,D 四点共圆.

如图(3),设圆心为点 P,半径为 r m,连接 PD,PF,BE,过点 P 作 $PS\perp DF$ 于点 S.

∵ $\angle BFE=90°$,

∴ BE 是⊙P 的直径.

∵ $\angle FBD=60°$,∴ $\angle FPD=120°$.

又∵ $PF=PD$,∴ $\angle PFD=\angle PDF=30°$,

∴ $PS=\frac{1}{2}r$ m,∴ $FS=\sqrt{FP^2-PS^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$ m,

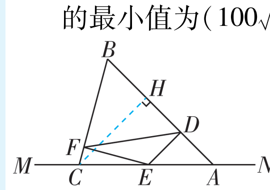
∴ $DF=2FS=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}r$ m. ∵ 要使 DF 的值最小,∴ 要使 r 的值最小,而 BE 是直径,$BE=2r$ m,

∴ 当 $BE\perp AC$ 时,BE 取得最小值,

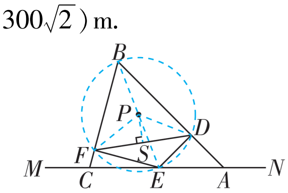
此时$\triangle ABE$ 是等腰直角三角形.

∵ $AB=(400+400\sqrt{3})$ m,∴ $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=(200\sqrt{2}+200\sqrt{6})$ m,∴ $r=\frac{1}{2}BE=(100\sqrt{2}+100\sqrt{6})$ m,

∴ $DF=(100\sqrt{6}+300\sqrt{2})$ m,故玻璃桥 DF 长的最小值为$(100\sqrt{6}+300\sqrt{2})$ m.



图(2)



图(3)